# Глава 9
## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § 1. Вычисление определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a,\, b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a,\, b]$ на $n$ частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Из каждого интервала $(x_{i-1},\, x_i)$ возьмем произвольную точку $\xi_i$ и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от $a$ до $b$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a,\, b]$.

Для *интегрируемости* достаточно, чтобы на отрезке $[a,\, b]$ функция была *непрерывна* или же имела конечное число конечных разрывов.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (2)$$

и имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int f(x)\,dx\Big|_a^b, \qquad (3)$$

т. е. *определенный интеграл* от непрерывной функции *равен разности значений первообразной функции* (или неопределенного интеграла) при верхнем и нижнем пределах. Формула (3) называется формулой Ньютона–Лейбница.

**1591.** Составлением интегральных сумм и переходом к пределу найти интегралы:

$$1)\ \int_0^a x\,dx;\quad 2)\ \int_0^a x^2\,dx;\quad 3)\ \int_0^a e^x\,dx;\quad 4)\ \int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Указание. При решении второго и четвертого примеров воспользоваться результатами задач 1034 и 647.

**1592.** Вычислить «нижнюю» и «верхнюю» интегральные суммы $s_5$ и $S_5$ для интеграла $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$, разбив отрезок $[1,\ 2]$ на пять равных частей. Сравнить с точным значением интеграла.

Указание. $s_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} m_i \Delta x$, $S_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} M_i \Delta x$, где $m_i$ — наименьшее, а $M_i$ — наибольшее значение подынтегральной функции в $i$-м частичном промежутке.

Вычислить:

**1593.** $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx.$ **1594.** $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\,dx.$

**1595.** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx.$ **1596.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

**1597.** $\displaystyle\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$ **1598.** $\displaystyle\int_0^3 e^{x/3}\,dx.$

**1599.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ **1600.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx.$

**1601.** $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$ **1602.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}\,dx.$

Указание. В задаче 1601 нужно применить подстановку $x = t^2$; при этом пределы интеграла изменятся, что записывается в виде таблицы $\dfrac{x\,|\,4\,|\,9}{t\,|\,2\,|\,3}$. Аналогично в задаче 1602 при интегрировании подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ нужно соответственно изменить пределы.

**1603.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. **1604.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

**1605.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$. **1606.** $\displaystyle\int_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$.

**1607.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$. **1608.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}\,dx$.

**1609.** $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$. **1610.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

**1611.** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **1612.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

**1613.** Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx,$$

и вычислить:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$.

---

Вычислить:

**1614.** $\displaystyle\int_0^a (x^2-ax)\,dx$. **1615.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$.

**1616.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **1617.** $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

**1618.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$. **1619.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

**1620.** $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. **1621.** $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

**1622.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$. **1623.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

**1624.** Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\,dx,$$

и вычислить:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx$.

## § 2. Вычисление площадей

1°. Площадь криволинейной трапеции $A_1ABB_1$, прилежащей к оси $Ox$ (рис. 31):

$$S = \lim_{\Delta x\to 0}\sum y\Delta x = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx. \tag{1}$$

Дифференциал переменной площади $A_1AMM_1$ равен $dS = y\,dx$.

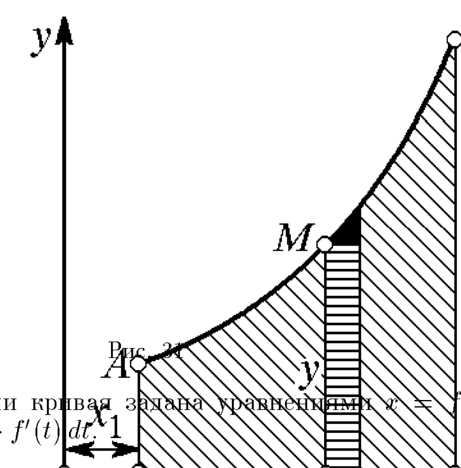


Рис. 31

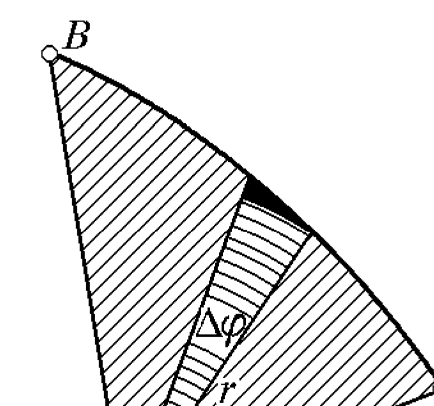


Рис. 32

Если кривая задана уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$, то $dS = \varphi(t)\cdot f'(t)\,dt$.

2°. Площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Oy$:

$$S = \lim_{\Delta y \to 0} \sum x \Delta y = \int\limits_{y_1}^{y_2} x\, dy. \qquad (2)$$

Дифференциал переменной площади $dS = x\, dy$.

3°. Площадь сектора $OAB$ (рис. 32) кривой, заданной в *полярных* координатах:

$$S = \lim_{\Delta \varphi \to 0} \sum \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2\, d\varphi. \qquad (3)$$

Дифференциал переменной площади $dS = \dfrac{1}{2} r^2\, d\varphi$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

**1625.** $y = 4 - x^2,\ y = 0.$

**1626.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

**1627.** $y^2 = 2px,\ x = h.$

**1628.** $y = 3 - 2x - x^2,\ y = 0.$

**1629.** $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

**1630.** $y = \ln x,\ x = e,\ y = 0.$

**1631.** $y^2 = 2x + 4,\ x = 0.$

**1632.** $y^2 = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$

**1633.** $y^2 = (4 - x)^3,\ x = 0.$

**1634.** Петлей кривой $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0.$

**1635.** $y = x^2,\ y = 2 - x^2.$

**1636.** $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4.$

**1637.** $a^2 y^2 = x^3 (2a - x).$

**1638.** $(y - x)^2 = x^3,\ x = 1.$

**1639.** Петлей строфоиды $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$.

**1640.** Цепной линией $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, $x = \pm a$ и $y = 0$.

**1641.** Одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью $Ox$.

**1642.** Астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

**1643.** Лемнискатой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

**1644.** Кардиоидой $r = a(1 - \cos \varphi)$.

**1645.** $r = 3 + \sin 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

**1646.** $r = 2 - \cos 3\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

**1647.** $r = a\cos 2\varphi$. **1648.** $r = a\sin 3\varphi$.

**1649.** $r = a(\sin\varphi + \cos\varphi)$. **1650.** $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

**1651.** $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, лежащей ниже полярной оси.

**1652.** Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. рис. 79 на с. 334) (перейти к полярным координатам).

Указание. В интеграле $\displaystyle\int \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}$ положить $\operatorname{tg}\varphi = u$, разделив сначала числитель и знаменатель на $\cos^6\varphi$.

---

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

**1653.** $y = 6x - x^2$, $y = 0$.
**1654.** $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.
**1655.** $y^2 = 1 - x$ и $x = -3$.
**1656.** $y^2 + x^4 = x^2$.
**1657.** $y = x^2 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ и минимальной ординатой.
**1658.** Одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и $y = 0$.
**1659.** $4y = x^2$ и $y^2 = 4x$.
**1660.** $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0$.
**1661.** Петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.
**1662.** $r = 3 - \cos 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.
**1663.** $r = 2 + \sin 3\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.
**1664.** $r = a\sin 2\varphi$. **1665.** $r = a\cos 3\varphi$.
**1666.** $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$.

**1667.** Общей части эллипсов $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (перейти к полярным координатам).

**1668.** $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$ и $r = a$.

## § 3. Объем тела вращения

1°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $A_1ABB_1$ (рис. 33), где $\overset{\smile}{AB}$ — дуга кривой $y = f(x)$, определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2\,dx. \qquad (1)$$

Дифференциал переменного объема $dV = \pi y^2\,dx$.

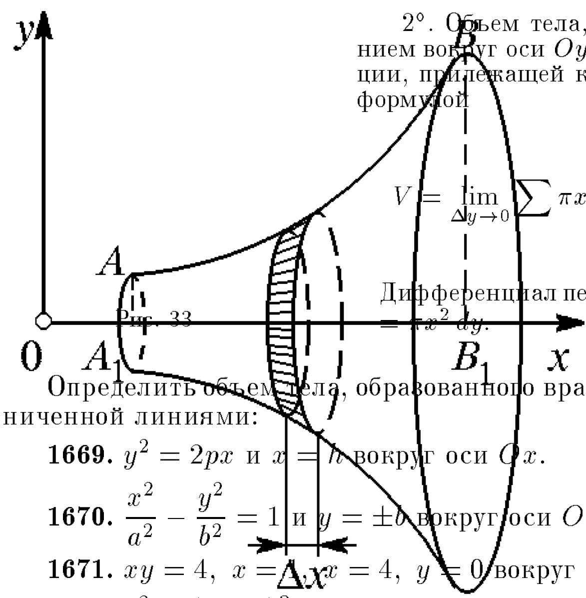


Рис. 33

2°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, прилежащей к оси $Oy$, определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2\, dy. \qquad (2)$$

Дифференциал переменного объема $dV = \pi x^2\, dy$.

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

**1669.** $y^2 = 2px$ и $x = h$ вокруг оси $Ox$.

**1670.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$ вокруг оси $Oy$.

**1671.** $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси $Ox$.

**1672.** $y^2 = (x+4)^3$ и $x = 0$ вокруг оси $Oy$.

**1673.** $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $x = b > a$.

Указание. $dV = \pi(b+x)^2\, dy - \pi(b-x)^2\, dy = 4\pi bx\, dy$.

**1674.** $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a},\ x = \pm a,\ y = 0$ вокруг оси $Ox$.

**1675.** $y^2 = 4 - x,\ x = 0$ вокруг оси $Oy$.

**1676.** $(y-a)^2 = ax,\ x = 0,\ y = 2a$ вокруг оси $Ox$.

**1677.** $y = \cos x$ и $y = -1$ вокруг прямой $y = -1$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

**1678.** $y = x\sqrt{-x},\ x = -4$ и $y = 0$ вокруг оси $Oy$.

**1679.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right),\ x = 0,\ y = 0$ (при $x > 0$) вокруг оси $Ox$.

**1680.** $y = a - \dfrac{x^2}{a}$ и $x + y = a$ вокруг оси $Oy$.

---

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

**1681.** $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси $Ox$.

**1682.** $x^2 - y^2 = 4,\ y = \pm 2$ вокруг оси $Oy$.

**1683.** $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ x = \pm 1,\ y = 0$ вокруг оси $Ox$.

**1684.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $Oy$.

**1685.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси $Ox$.

**1686.** $y=x^3,\ x=0,\ y=8$ вокруг оси $Oy$.

**1687.** $x^2-y^2=a^2,\ x=\pm 2a$ вокруг оси $Ox$.

**1688.** $y=x^2,\ y=4$ вокруг прямой $x=2$.

Указание. $dV=\pi(2+x)^2\,dy-\pi(2-x)^2\,dy$.

**1689.** Одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ вокруг оси $Ox$.

**1690.** $(y-3)^2+3x=0,\ x=-3$ вокруг оси $Ox$.

## § 4. Длина дуги плоской кривой

1°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $y=f(x)$:

$$s=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1}$$

Дифференциал дуги $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

2°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $x=f(t),\ y=\varphi(t)$:

$$s=\int\limits_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \tag{2}$$

3°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $r=f(\varphi)$:

$$s=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Определить длину дуги кривой:

**1691.** $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=4/3$.

**1692.** Всей кривой $x^2+y^2=a^2$.

**1693.** Всей кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**1694.** $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

**1695.** Одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

**1696.** $x=\dfrac{t^6}{6},\ y=2-\dfrac{t^4}{4}$ между точками пересечения осями координат.

**1697.** $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью $Ox$.

Указание. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ можно или найти по частям, или написать по формуле задачи 1366.

**1698.** $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ между прямыми $x = \pm a$.

**1699.** $y = \ln x$ от $x = 3/4$ до $x = 12/5$.

Указание. Интеграл $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x}$ находится подстановкой $1 + x^2 = t^2$.

**1700.** $y = \ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат $Oy$ и $Ox$.

**1701.** 1) $9y^2 = x(x-3)^2$ между точками пересечения с осью $Ox$.
2) $e^{2y} \operatorname{th} x = 1$ от $x = 1$ до $x = 2$.

**1702.** 1) Кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$.
2) Первого завитка спирали $r = a\varphi$.

**1703.** Всей кривой $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

**1704.** Гибкая нить подвешена в точках $A$ и $B$, находящихся на одной высоте на расстоянии $AB = 2b$, и имеет стрелу прогиба $f$. Считая форму нити параболой, показать, что длина нити $s \approx 2b\left(1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{f^2}{b^2}\right)$ при достаточно малом $\dfrac{f}{b}$.

Указание. Применить приближенную формулу $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \dfrac{1}{2}\alpha$ задачи 1157.

---

Определить длину дуги кривой:

**1705.** $y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

**1706.** $y = \ln(\sin x)$ от $x = \pi/3$ до $x = 2\pi/3$.

**1707.** $y = \ln(1 - x^2)$ от $x = -1/2$ до $x = 1/2$.

**1708.** $y^2 = 2px$, отсеченной прямой $x = p/2$.

**1709.** $x = t^2$, $y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3)$ между точками пересечения с осью $Ox$.

## § 5. Площадь поверхности вращения

1°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги $\breve{AB}$ кривой $y = f(x)$:

$$P_x = 2\pi \int\limits_{\breve{AB}} y\,ds, \quad \text{где} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

2°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$ дуги $\breve{AB}$ кривой $x = \varphi(y)$:

$$P_y = 2\pi \int\limits_{\breve{AB}} x\,ds, \quad \text{где} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой:

**1710.** $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси $Ox$.

**1711.** $y = x^2/2$, отсеченной прямой $y = 1,5$, вокруг оси $Oy$.

**1712.** $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ между $x = \pm a$ вокруг оси $Ox$.

**1713.** $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси $Oy$.

Указание. Приняв $y$ за независимую переменную, получим, что искомая площадь $P = \pi \int\limits_0^2 \sqrt{16 - 3y^2}\,dy$. Далее применяем подстановку $y = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \sin t$.

**1714.** Одной полуволны кривой $y = \sin x$ вокруг оси $Ox$.

**1715.** Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси $Ox$.

**1716.** Петли кривой $x = t^2$, $y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3)$ вокруг оси $Ox$.

**1717.** $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $x = b > a$.

Указание. $dP = 2\pi(b + x)\,ds + 2\pi(b - x)\,ds$.

---

Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг $Ox$:

**1718.** Дуги кривой $y = \dfrac{x^3}{3}$ от $x = -2$ до $x = 2$.

**1719.** Дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

**1720.** Всей кривой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

**1721.** Дуги кривой $x = \dfrac{t^3}{3},\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}$ между точками пересечения с осями координат.

## § 6. Задачи из физики

**1722.** Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 8 м и высотой 6 м. Определить также силу давления на нижнюю половину шлюза.

**1723.** Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку, основание которой $a$ расположено на поверхности воды, а высота равна $h$.

**1724.** Определить силу давления воды на вертикальный полукруг, диаметр которого $2R$ расположен на поверхности воды.

**1725.** Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20 м, нижним 10 м и высотой 6 м. Определить силу давления воды на плотину.

**1726.** Найти моменты инерции относительно осей $Ox$ и $Oy$ площади прямоугольника, ограниченного линиями $x = 0,\ x = a$, $y = 0$ и $y = b$.

Указание. Разбив прямоугольник на горизонтальные площадки, умножим каждую площадку на квадрат ее расстояния от оси $Ox$, т. е. на $y^2$. Суммируя и перейдя к пределу, получим

$$J_x = \lim_{\Delta y \to 0} \sum a\Delta y\, y^2 = \int\limits_0^b ay^2\, dy.$$

Аналогично $J_y = \int\limits_0^a bx^2\, dx$.

**1727.** Найти момент инерции относительно осей $Ox$ и $Oy$ площади треугольника, ограниченного линиями $x = 0,\ y = 0$ и $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

**1728.** Найти момент инерции относительно оси $Oy$ площади, ограниченной линиями $x = 2,\ y = x^2$ и $y = 0$.

**1729.** Найти статические моменты относительно $Ox$ и $Oy$ и координаты центра масс треугольника, образованного линиями $x = 0,\ y = 0$ и $x + y = a$.

Указание. Статические моменты: $M_x = \int\limits_0^a xy\, dy,\ M_y = \int\limits_0^a xy\, dx$.

Координаты центра масс: $x_c = \dfrac{M_y}{S},\ y_c = \dfrac{M_x}{S}$, где $S$ — площадь фигуры.

**1730.** Найти центр масс площади, ограниченной линиями $a^2y = bx^2$, $x = a$ и $y = 0$.

**1731.** Найти центр масс полукруга $x^2 + y^2 = a^2$, отсеченного осью $Ox$.

**1732.** 1) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна с радиусом основания 0,5 м, если в начальный момент уровень воды в бассейне равен 2,8 м и на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре.

2) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом $R$ м.

**1733.** Определить работу, которую нужно затратить, чтобы поднять массу $m$ с поверхности земли на высоту $h$.

Указание. Сила $F$ земного притяжения на расстоянии $x$ от центра земли определяется из пропорции $F : mg = R^2 : x^2$, где $R$ — радиус земного шара.

**1734.** Котел имеет форму параболоида вращения глубиной $H = 0,5$ м и радиусом основания $R = 0,4$ м. Определить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из такого наполненного котла.

**1735.** В цилиндре под поршнем находится воздух объемом $V_0 = 0,1\,\text{м}^3$ с давлением $p_0 = 1,033 \cdot 10^5$ Па. Определить работу изотермического сжатия воздуха до объема $V_1 = 0,03\,\text{м}^3$. (По закону Бойля–Мариотта $pV = p_0V_0$.)

**1736.** Вычислить работу растяжения на 0,001 м медной проволоки длиной 1 м с радиусом сечения 2 мм.

Указание. Сила $F$ Н натяжения проволоки длиной $l$ м и площадью сечения $s\,\text{мм}^2$ при удлинении ее на $x$ м определяется формулой $F = E\dfrac{sx}{l}$, где $E$ — модуль упругости. Для меди можно принять $E \approx 1,2 \cdot 10^5\,\text{Н/мм}^2$.

**1737.** За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 420\,\text{см}^2$ и высотой $H = 40$ см, вытечет через отверстие на дне площадью $s = 2\,\text{см}^2$?

Указание. Скорость истечения жидкости при уровне ее на высоте $x$ см определяется по формуле $v = \mu\sqrt{2gx}$, где $\mu$ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и отверстия. Мы примем здесь, как и в задаче 1738, $\mu = 0,6$.

**1738.** За какое время вода вытечет из конической воронки высотой $H = 40$ см, радиусом нижнего основания $r = 0,3$ см и верхнего $R = 6$ см (см. указание к задаче 1737)?

---

**1739.** Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку высотой $h$, основание которой $a$ параллельно поверхности воды, а противоположная вершина находится на поверхности воды.

**1740.** Определить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

**1741.** Найти глубину $x$, на которой прямоугольный шлюз высотой $h$ разделится горизонтально на такие две части, величина силы давления на которые одинакова.

**1742.** Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью наполовину наполнена маслом (плотность 0,9). Определить силу давления масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 2 м.

**1743.** Определить момент инерции относительно $Ox$ площади четверти круга $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

**1744.** Найти координаты центра масс площади, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

**1745.** Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого $H = 2$ м, а радиус основания $R = 0,3$ м.

**1746.** Определить работу адиабатического сжатия воздуха объемом $V_0 = 0,1\,\text{м}^3$ и с давлением $p_0 = 1,033 \cdot 10^5$ Па до объема $V_1 = 0,03\,\text{м}^3$. (Адиабатическое сжатие происходит по закону Пуассона: $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$, где $\gamma \approx 1,4$.)

**1747.** За какое время вода, наполняющая чашу формы полушара радиусом 40 см, вытечет из отверстия на дне площадью 2 см$^2$? (См. указание к задаче 1737; положим коэффициент вязкости $\mu = 0,8$.)

## § 7. Несобственные интегралы

1°. Определения:

I. Интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если этот предел существует и конечен. Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

II. Если $f(x)$ непрерывна для всех значений $x$ отрезка $[a,\,b]$, кроме точки $c$, в которой $f(x)$ имеет разрыв II рода, то интегралом от $f(x)$ в пределах от $a$ до $b$ называется сумма

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

если эти пределы существуют и конечны.

Интегралы с *бесконечными пределами* и интегралы от *разрывных* (*неограниченных*) функций называются *несобственными*.

Если приведенные выше пределы конечны, то говорят, что несобственные интегралы *сходятся*, если нет, — то *расходятся*.

2°. Сходимость несобственного интеграла часто устанавливается методом сравнения: если при $x > a |f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Аналогичный признак сходимости можно указать и для интеграла от разрывной функции.

Вычислить интегралы:

**1748.** 1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$.

**1749.** 1) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 5) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$; 6) $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x/2}\,dx$.

**1750.** 1) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

**1751.** 1) $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[8]{(4-x)^2}}$; 2) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

**1752.** Исследовать сходимость интегралов:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3-1}}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$;

4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2}$; 5) $\int\limits_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

**1753.** 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n}$; 2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ (при $b > a$).

Указание. Рассмотреть три случая: $n = 1 - \alpha < 1$, $n = 1$ и $n = 1 + \alpha > 1$.

**1754.** Вычислить площадь, заключенную между локоном $y = \frac{1}{1+x^2}$ и асимптотой этой кривой.

**1755.** Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой (при $x > 0$).

**1756.** Вычислить площадь, заключенную между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой.

Указание. Положив $x = 2a\sin^2 t$, перейти к параметрическим уравнениям.

**1757.** Найти объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ вокруг ее асимптоты (см. задачу 1756).

**1758.** Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ бесконечной дуги кривой $y = e^{-x}$ при положительных $x$.

**1759.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ бесконечной ветви кривой $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ при $x \geqslant 1$.

**1760.** Показать, что при $m$ целом и положительном [1]):

1) $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^m\,dx = m!$; 2) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}x^{2m+1}\,dx = \frac{m!}{2}$.

**1761.** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2}$; 4) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$.

---

[1]) Функция $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx = \Gamma(t)$ называется гамма-функцией от $t$. При целом $t > 1$, как это следует из задачи 1760, 1), $\Gamma(t) = (t-1)!$ Полагая здесь $t = 1$, получим условно $0! = \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^0\,dx = 1$. Поэтому принято считать $0! = 1$.

Указание. В примере 3) при нахождении $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ применить правило Лопиталя.

**1762.** 1) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$; 3) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x^4}$.

**1763.** Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = e^{-2x}$ и осями координат (при $x > 0$).

**1764.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ площади бесконечной длины, заключенной между линиями:

$$xy = 4, \quad y = 1, \quad x = 0.$$

**1765.** Определить объем тела, образованного вращением кривой $y = xe^{-x/2}$ (при $x > 0$) вокруг ее асимптоты.

## § 8. Среднее значение функции

Теорема о среднем. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то между пределами интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ найдется такое $x = c$, при котором

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c). \tag{1}$$

Значение функции

$$y_m = f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \tag{2}$$

называется *средним* значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

**1766.** Определить среднее значение функции:

1) $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$;

2) $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0, \pi/3]$;

3) $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$;

4) $y = x^2$ на отрезке $[a, b]$;

5) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Указать на чертеже среднее значение функции в каждом примере.

## § 9. Формула трапеций и формула Симпсона

1°. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right], \tag{I}$$

где $h=(b-a)/n$, а $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — равноотстоящие ординаты кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Погрешность формулы (I):

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^2}{12}|y''|_{\max}. \tag{1}$$

2°. Параболическая формула Симпсона для двух полос:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2), \tag{II}$$

где $h=(b-a)/2$.

3°. Формула Симпсона для $2n$ полос:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right], \tag{III}$$

где $h=(b-a)/2n$. Погрешность формул (II) и (III):

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180}|y^{\mathrm{IV}}|_{\max}, \tag{2}$$

т. е. формула (II) является точной для парабол второй и третьей степеней: $y=a+bx+cx^2+dx^3$.

**1767.** Вычислить по формуле трапеций $\ln 2=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ и оценить погрешность по формуле (1).

**1768.** По формуле Симпсона (III) вычислить интегралы $\int\limits_1^5 x^3\,dx$ и $\int\limits_0^2 x^4\,dx$, оценить погрешность по формуле (2) и результаты сравнить с точными значениями интегралов.

**1769.** По формуле Симпсона (III) вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \quad (2n=4)$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{3-\cos 2x}\,dx \quad (2n=6)$;

3) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+x^4} \quad (2n=4)$ и оценить погрешность, полагая в формуле (2) приближенно $h^4|y^{\mathrm{IV}}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$.

**1770.** Найти по формуле Симпсона (II) объем бочки высотой 50 см с диаметром каждого дна 20 см и с диаметром среднего сечения 30 см.

**1771.** Вывести формулы объема пирамиды и шара из формулы Симпсона (II).

**1772.** Вычислить $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ по общей формуле Симпсона (III) (при $2n=10$) и оценить погрешность по формуле (2).

**1773.** Найти длину дуги эллипса $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$, применив к интегралу, определяющему первую четверть всей дуги, формулу Симпсона (II).

**1774.** Вычислить приближенно $\pi = 6\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, применив к интегралу формулу Симпсона (II).

---

**1775.** Вычислить $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по общей формуле Симпсона (III) (при $2n=10$) и оценить погрешность, полагая в формуле (2) приближенно $h^4|y^{\mathrm{IV}}|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$.

**1776.** Рассматривая площадь части круга, ограниченного кривой $x^2+y^2=32$, показать, что $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx = 4\pi+8$; найти $\pi$, вычисляя интеграл по формуле Симпсона (при $2n=4$).

**1777.** Вычислить по формуле Симпсона (III) длину дуги полуволны синусоиды $y=\sin x$, разбив отрезок $[0,\pi]$ на шесть равных частей.