Глава 7
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Скорость и ускорение

Пусть точка движется по оси Ox и в момент t имеет координату $x = f(t)$. Тогда в момент t

скорость $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$,

ускорение $w = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

1090. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

1091. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

1092. Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x = a\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x = \pm a$ и $x = 0$. Показать, что ускорение $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ и отклонение x связаны «дифференциальным» уравнением $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$.

1093. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b и c — положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?

1094. Колесо радиуса a катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi = t + \dfrac{t^2}{2}$. Определить скорость и ускорение движения центра колеса.

1095. Пусть v — скорость и w — ускорение точки, движущейся по оси Ox. Показать, что $w\,dx = v\,dv$.

1096. Точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 2ax$, где v — скорость, x — пройденный путь и a — постоянная. Определить ускорение движения.

1097. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. На какой высоте x оно будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

1098. Сосуд в форме полушара радиуса R см наполняется водой с постоянной скоростью a л/с. Определить скорость повышения уровня на высоте уровня h см и показать, что она обратно пропорциональна площади свободной поверхности жидкости.

Указание. Объем шарового сегмента $V = \pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3}\right)$. Обе части этого равенства нужно продифференцировать по t, причем $\dfrac{dV}{dt} = a$ (по условию).

1099. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

1100. Пусть угловая скорость $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$, угловое ускорение $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Показать, что $\dfrac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\varepsilon$.

§ 2. Теоремы о среднем

1°. Теорема Ролля. Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, 3) $f(a) = f(b)$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f'(c) = 0. \tag{1}$$

2°. Теорема Лагранжа. Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{2}$$

3°. Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$: 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$, 2) имеют производные внутри него, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{3}$$

Эти теоремы носят название теорем о среднем потому, что в них говорится о некотором значении $x = c$, среднем между a и b.

Геометрически теоремы Ролля и Лагранжа утверждают, что на дуге AB непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в каждой точке определенную касательную и не имеющей точек возврата, найдется внутренняя точка, касательная в которой параллельна хорде AB.

На дугах, содержащих угловые точки или точки возврата, условия теорем о среднем, очевидно, не выполнены.

Теорему Ролля в частном случае при $f(b) = f(a) = 0$ формулируют так: между двумя корнями a и b функции $f(x)$ найдется по крайней мере один корень ее производной $f'(x)$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную внутри него.

1101. Проверить, что между корнями функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ находится корень ее производной. Пояснить графически.

1102. Применима ли теорема Ролля к функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$? Пояснить графически.

1103. Построить дугу $\smile{AB}$ кривой $y = |\sin x|$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB? Какое из условий теоремы Ролля здесь не выполнено?

1104. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1; 1)$ и $B(3; 9)$? Пояснить графически.

1105. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[a, b]$ и найти c. Пояснить графически.

1106. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$ и найти c.

1107. Показать, что на отрезке $[-1, 2]$ теорема Лагранжа неприменима к функциям $\dfrac{4}{x}$ и $1 - \sqrt[3]{x^2}$. Пояснить графически.

1108. Построить $\smile{AB}$ кривой $y = |\cos x|$ на отрезке $[0, 2\pi/3]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

1109. Пусть $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| < 2, \\ 1 & \text{при } |x| \geqslant 2. \end{cases}$ Построить график этой функции и, взяв на нем точки $O(0; 0)$ и $B(2; 1)$, показать, что между O и B на этом графике нет точки, касательная в которой была бы параллельна OB. Какие условия теоремы Лагранжа для этой функции на отрезке $[0, 2]$ выполнены и какие нет?

1110. Поезд прошел расстояние между станциями со средней скоростью $v_0 = 40$ км/ч. Теорема Лагранжа утверждает, что был момент движения, в который истинная (а не средняя) скорость движения $\dfrac{ds}{dt}$ была равна 40 км/ч. Показать это.

1111. Дано, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ и имеет производную в каждой точке внутри него. Применив теорему Ролля к функции

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix},$$

получить теорему Лагранжа. Выяснить геометрическое значение функции $\Phi(x)$.

1112. Написать формулу Коши $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ для функций $f(x) = x^3$ и $\varphi(x) = x^2$ и найти c.

1113. Геометрически теорема Коши утверждает, что на дуге кривой $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ для значений t на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ найдется внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде, если функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ на отрезке $[a,\, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Доказать это.

1114. Написать формулу Лагранжа в виде $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x+\theta\Delta x)$, где $0 < \theta < 1$, для функций: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$, и показать, что для первой функции θ не зависит от x, а для второй зависит от x и Δx.

1115. Показать, что $\sqrt{101} = 10 + \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}} \approx 10{,}05$.

1116. С помощью формулы Коши доказать, что если

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

то

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

где $0 < \theta < 1$.

1117. Написать формулу Лагранжа

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

для функции $f(x) = x^3$ и найти c.

1118. Написать формулу Лагранжа и найти c для функций:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0,\, 1]$;
2) $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[0,\, 1]$;
3) $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1,\, 2]$.

1119. Написать формулу Коши и найти c для функций:

1) $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке $[0; \pi/2]$;
2) x^2 и $\sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$.

1120. Построить график функции $y = |x-1|$ на отрезке $[0, 3]$. Почему здесь нельзя провести касательную, параллельную хорде? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

1121. В какой точке касательная к кривой $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2; 0)$ и $B(1; 3)$? Пояснить графически.

§ 3. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

1°. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует.

2°. Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует.

3°. Неопределенности $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} и 0^0 сводятся к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

Найти пределы:

1122. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

1123. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

1124. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x^n - a^n}$.

1125. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$.

1126. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

1127. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

1128. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

1129. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

1130. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

1131. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

1132. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

1133. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

1134. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **1135.** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

1136. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\cdot e^{-x}$. **1137.** $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

1138. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **1139.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

1140. Определить порядок бесконечно малой $xe^x - \sin x$ относительно $x\to 0$.

1141. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $x - \operatorname{arctg} x \approx \dfrac{x^3}{3}$; 2) $a^x - b^x \approx x\ln\dfrac{a}{b}$;

3) $e^{2x} - 1 - 2x \approx 2x^2$; 4) $2x - \ln(1+2x) \approx 2x^2$.

1142. Доказать, что (при $x\to 0$) $x - \sin x \approx \dfrac{x^3}{6}$ и отсюда $\sin x \approx \approx x$ с погрешностью, приближенно равной $x^3/6$. Вычислить $\sin 1^\circ$ и $\sin 6^\circ$ и оценить погрешность.

1143. Доказать, что (при $\alpha\to 0$) $\sqrt[3]{1+\alpha} - 1 - \dfrac{1}{3}\alpha \approx -\dfrac{\alpha^2}{9}$ и отсюда $\sqrt[3]{1+\alpha}\approx 1+\dfrac{1}{3}\alpha$ с погрешностью $\approx\dfrac{\alpha^2}{9}$. Вычислить $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{210}$ и оценить погрешность.

Найти пределы:

1144. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$. **1145.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1146. $\lim\limits_{x\to\pi/2a}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$. **1147.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - l^x}{\operatorname{tg} x}$.

1148. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. **1149.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

1150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$. **1151.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

1152. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg} x$. **1153.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

1154. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **1155.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$.

1156. Доказать, что при $x\to 0$ $\arcsin x - x \approx \dfrac{x^3}{6}$.

1157. Доказать, что (при $\alpha \to 0$) $\sqrt{1+\alpha} - 1 - \dfrac{\alpha}{2} \approx -\dfrac{\alpha^2}{8}$ и отсюда $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \dfrac{\alpha}{2}$ с погрешностью, приближенно равной $\dfrac{\alpha^2}{8}$. Вычислить $\sqrt{1,006}$, $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,998}$, $\sqrt{0,994}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$ и оценить погрешность.

§ 4. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум

1°. Определения:

I. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если в некоторой ε-окрестности этой точки

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

при любом положительном $h < \varepsilon$.

II. Функция $f(x)$ называется *возрастающей на отрезке* $[a, b]$, если для любых x_1 и x_2 на этом отрезке $f(x_1) < f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$.

Аналогично определяется убывание функции в точке и на отрезке.

III. Функция $f(x)$ называется имеющей *экстремум* (*максимум* или *минимум*) в точке x_0, если $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двусторонней окрестности этой точки.

2°. Достаточные признаки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ (в точке и на отрезке):

если $y' > 0$, то функция *возрастает*;

если $y' < 0$, то функция *убывает*.

3°. Необходимое условие экстремума. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в точках, где $y' = 0$ или не существует. Такие точки называются *критическими*. В них касательная или горизонтальна ($y' = 0$), или вертикальна (в точке возврата), или нет определенной касательной (например, в угловой точке). В двух последних случаях y' не существует.

4°. Достаточные условия экстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в некоторой окрестности x_0, кроме, быть может, точки x_0, конечную производную и если при переходе x через x_0:

y' меняет знак с $+$ на $-$, то $f(x_0) = y_{\max}$,

y' меняет знак с $-$ на $+$, то $f(x_0) = y_{\min}$,

y' не меняет знака, то экстремума нет.

Третий случай имеет место в обыкновенной точке (при $y' > 0$ или $y' < 0$), а также в точке перегиба и в угловой точке.

Итак, чтобы найти экстремум функции, нужно:

1) Найти y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

2) Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки, составив таблицу, например, вида

x		x_i		x_2		x_3	
y'	$-$	0	$+$	не существует	$-$	0	$-$
y	убывает		возрастает		убывает	перегиб	убывает

Далее можно найти $y_{\max}$ и $y_{\min}$ и построить кривую. На рис. 28 построена кривая, соответствующая приведенной выше таблице.

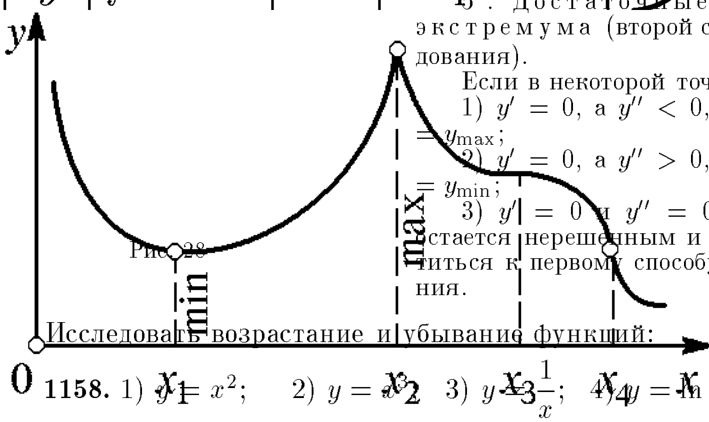

Рис. 28

3°. Достаточные условия экстремума (второй способ исследования).

Если в некоторой точке $x = x_0$:

1) $y' = 0$, а $y'' < 0$, то $f(x_0) = y_{\max}$;

2) $y' = 0$, а $y'' > 0$, то $f(x_0) = y_{\min}$;

3) $y' = 0$ и $y'' = 0$, то вопрос остается нерешенным и нужно обратиться к первому способу исследования.

Исследовать возрастание и убывание функций:

1158. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

1159. 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = e^x$; 3) $y = 4x - x^2$.

Найти экстремум функции и построить ее график [1]):

1160. $y = x^2 + 4x + 5$. **1161.** $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

1162. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. **1163.** $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

1164. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$. **1165.** $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

1166. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$. **1167.** $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1168. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$. **1169.** $y = x^2(1 - x)$.

1170. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$. **1171.** $y = e^{-x^2}$.

[1]) В задачах 1165, 1168, 1173 и некоторых других для построения кривой нужно найти ее асимптоты (см. гл. 5, § 9).

1172. $y = x + \cos 2x$ в интервале $(0,\ \pi)$.

1173. $x = 4x - \operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1174. $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$. **1175.** $y = x - \operatorname{arctg} 2x$.

1176. 1) $y = xe^{-x/2}$; 2) $y = x \ln x$.

1177. 1) $y = \sqrt{\sin x^2}$; 2) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

1178. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. **1179.** $y = x\sqrt{1 - x}$.

1180. $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{x + 2}$. **1181.** $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$.

1182. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$. **1183.** $y = x^{2/3} + (x-2)^{2/3}$.

1184. $y = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + x^3$. **1185.** $y = x^3(x+2)^2$.

1186. $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$. **1187.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

1188. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$. **1189.** $y = x + \ln(\cos x)$.

1190. 1) $y = \ln\sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x$; 2) $y = |x|(x+2)$.

1191. $y = x^2 e^{-x}$.

1192. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$.

Найти экстремум функции и построить ее график:

1193. $y = 4x - x^2$. **1194.** $y = x^2 + 2x - 3$.

1195. $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$. **1196.** $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

1197. $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$. **1198.** $y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$.

1199. $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$. **1200.** $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

1201. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$. **1202.** $y = xe^{-x^2/2}$.

1203. $y = x - 2\ln x$. **1204.** $y = x^{2/3}(x - 5)$.

1205. $y = \sin 2x - x$ в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

1206. $y = 2x + \operatorname{ctg} x$ в интервале $(0,\ \pi)$.

1207. $y = x + \operatorname{arcctg} 2x$.

1208. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

1209. $y = 2\sin x + \cos 2x$ в интервале $(0,\ \pi)$.

1210. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. **1211.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1212. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$. **1213.** $y = x + \dfrac{1}{x}$.

1214. 1) $y = ae^{-x}\cos x$ (при $x > 0$); 2) $y = 3x^5 - 5x^3$.

1215. $y = \dfrac{(4 - x)^3}{9(2 - x)}$. **1216.** $y = \dfrac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2 + 8}$.

1217. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$. **1218.** $y = (1 - x^2)(1 - x^3)$.

1219. $y = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$. **1220.** $y = x + 2\sqrt{-x}$.

1221. 1) $y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; 2) $y = \sqrt{1 - \cos x}$.

§ 5. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин

1222. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

1223. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

1224. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

1225. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

1226. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

1227. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1228. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1229. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

1230. Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость 1 тонно-километра при перевозке по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге?

1231. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы света источников относятся, как $27 : 8$.

1232. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом $120°$ с одинаковой скоростью v км/ч. В некоторый момент один самолет прилетел в точку пересечения линий движения, а второй не долетел до нее на a км. Через какое время расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

1233. Балка прямоугольного сечения со свободно опертыми концами равномерно нагружена по всей длине. Стрела ее прогиба обратно пропорциональна моменту инерции сечения балки $I = \dfrac{xy^3}{12}$, где x и y — размеры балки. Определить размеры балки при наименьшей стреле прогиба, если балка вырезана из круглого бревна с диаметром D.

1234. Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?

1235. Два коридора шириной 2,4 м и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой.

1236. В конус с радиусом 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

1237. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить его размеры.

1238. На параболе $y = x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

1239. Картина повешена на стене. Нижний ее конец на b см, а верхний на a см выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

1240. Общая длина стен изображенного на плане дома (рис. 29) должна быть равна 90 м. При какой ширине x коридора площадь трех остальных комнат будет наибольшей?

1241. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

1242. Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. На оси Ox найти точку M так, чтобы расстояние $S = AM + MB$ было наименьшим.

1243. Сопротивление балки продольному сжатию пропорционально площади поперечного сечения. Определить размеры балки, вырезанной из круглого бревна диаметром D, так, чтобы сопротивление ее сжатию было наибольшим.

1244. Из круга вырезается сектор, содержащий угол α, а затем сектор свертывается в конус. При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

1245. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой F (рис. 30). Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F, чтобы она была наименьшей. Коэффициент трения $\mu = 0,25$.

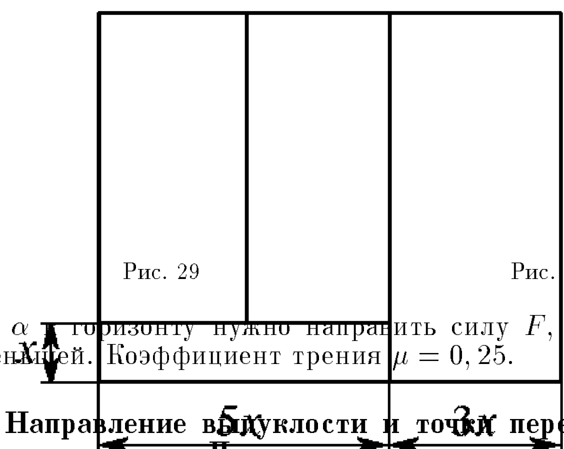

Рис. 29

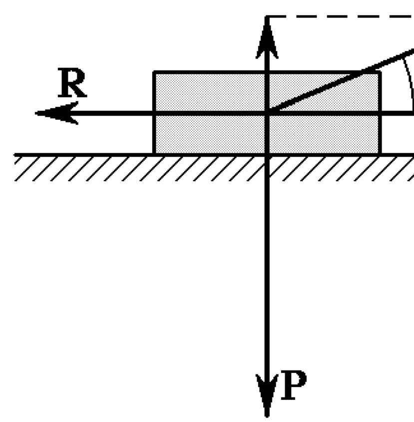

Рис. 30

§ 6. Направление выпуклости и точки перегиба кривой. Построение кривых

1°. В ы п у к л о с т ь. Кривая называется *выпуклой* «вверх» («вниз») в точке $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки (слева и справа) кривая расположена «ниже» («выше») касательной в этой точке. Если в точке $x = x_0$:

1) $y'' > 0$, то кривая выпукла «вниз»;

2) $y'' < 0$, то кривая выпукла «вверх».

2°. Т о ч к о й п е р е г и б а называется точка, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую (и, следовательно, меняет направление выпуклости). *Необходимым* условием точки перегиба является то, что в ней $y'' = 0$ или не существует, а *достаточным* — то, что y'' при этом меняет знак.

3°. Для построения кривой рекомендуется определить: 1) симметрию; 2) область расположения; 3) точки пересечения с осями Ox и Oy; 4) точки разрыва функции $y = \varphi(x)$ или $x = f(y)$ и асимптоты; 5) возрастание или убывание y или x и экстремальные точки; 6) направление выпуклости и точки перегиба.

1246. Исследовать направление выпуклости и построить кривые:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = e^x$;

4) $y = \ln x$; 5) $y = x^{5/3}$.

1247. Определить экстремальные точки и точки перегиба кривых и построить кривые:

1) $y = \dfrac{x^3}{6} - x^2$; 2) $y = e^{-x^2}$; 3) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $y = 2^{1/x}$.

Применяя некоторые из правил п. 3°, построить кривые, заданные в задачах 1248–1262 уравнениями:

1248. $y^2 = 2x + 9$. **1249.** $y = -x^2 - 4x$.

Указание. В задаче 1248 определить симметрию, область расположения и точки пересечения с осями, а в задаче 1249 — точку экстремума и точки пересечения с Ox.

1250. $y = \sin x$, $y = \cos x$. **1251.** $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$.

Указание. В задачах 1250, 1251 определить точки экстремума и перегиба.

1252. $y = \ln(x+2)$. **1253.** $y = e^{-x}$.

Указание. В задачах 1252, 1253 определить область расположения точки пересечения с осями, асимптоту и направление выпуклости.

1254. 1) $y^2 = x^3$; 2) $y^2 = (x+3)^3$.

1255. 1) $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$; 2) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

1256. 1) $y = \dfrac{e \ln x}{x}$; 2) $y = exe^{-x}$.

1257. 1) $y = x + \dfrac{4}{x+2}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^2}$.

1258. 1) $y = x - \ln x$; 2) $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$.

1259. 1) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; 2) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^4}$.

1260. 1) $y^2 = 2x^2 - x^4$; 2) $x(y-x)^2 = 4$.

1261. $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

1262. $y^2 = xe^{-x}$.