Глава 6

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Производные алгебраических и тригонометрических функций

1°. Определения. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Если этот предел *конечный*, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x; при этом она оказывается обязательно и *непрерывной* в этой точке.

Если же предел (1) равен $+\infty$ (или $-\infty$), то будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x *бесконечную производную*, однако при дополнительном условии, что функция в этой точке непрерывна.

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$, или $\dfrac{df(x)}{dx}$. Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

2°. Основные формулы дифференцирования:

1) $(c)' = 0$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(cu)' = cu'$;

4) $(u+v)' = u' + v'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; 7) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

8) $(\sin x)' = \cos x$; 9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

848. Вычислением $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные функций:

1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin x$;

5) $y = \dfrac{1}{x}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 8) $y = \operatorname{tg} x$;

9) $y = \dfrac{1}{x^3}$; 10) $y = \sqrt{1+2x}$; 11) $y = \dfrac{1}{3x+2}$;

12) $y = \sqrt{1+x^2}$.

Найти по формулам производные функций:

849. 1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2) $y = \dfrac{bx + c}{a}$.

850. 1) $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x$; 2) $y = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^2$.

851. 1) $y = x + 2\sqrt{x}$; 2) $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$.

852. 1) $y = \dfrac{10}{x^3}$; 2) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

853. 1) $y = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$; 2) $y = 3x - 6\sqrt{x}$.

854. 1) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$; 2) $y = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

855. 1) $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3}$; 2) $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

856. 1) $y = x - \sin x$; 2) $y = x - \operatorname{tg} x$.

857. 1) $y = x^2 \cos x$; 2) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$.

858. 1) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

859. 1) $y = \dfrac{x}{1 - 4x}$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

860. 1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$; 2) $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

861. 1) $s = \dfrac{gt^2}{2}$; 2) $x = a(t - \sin t)$.

862. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$; вычислить $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

863. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

864. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$; вычислить $0,01 \cdot f'(0,01)$.

Найти производные функций:

865. 1) $y = (a - bx^2)^3$; 2) $y = (1 + \sqrt[3]{x})^2$.

866. 1) $y = \dfrac{1}{10x^5} - \dfrac{1}{4x^4}$; 2) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

867. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

868. 1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

869. 1) $y = \sqrt{x} \cos x$; 2) $s = \dfrac{t}{2} - \dfrac{2}{t}$.

870. 1) $y = x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{3x^3}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

871. 1) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 2) $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$.

872. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; найти $f'(-8)$.

873. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$; найти $f'(0)$, $f'(2)$ и $f'(-2)$.

§ 2. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то y называется *функцией от функции* или *сложной функцией* от x. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = f'(u) \cdot u'. \tag{1}$$

Формулы предыдущего параграфа примут теперь общий вид:

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; 4) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

5) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$; 6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

Найти производные функций:

874. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos (a - bx)$.

875. 1) $y = \sin \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}$; 2) $y = 6 \cos \dfrac{x}{3}$.

876. 1) $y = (1 - 5x)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.

877. 1) $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^5}$; 2) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 3) $y = \sqrt{\cos 4x}$.

878. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. **879.** $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.

880. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = \sec^2 x$.

881. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$. **882.** $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$.

883. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$. **884.** $y = \sin \sqrt{x}$.

885. $y = \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}$.

886. $y = \dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$. **887.** $y = \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{3}$.

888. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. **889.** $y = x\sqrt{x^2-1}$.

890. $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$. **891.** $s = a\cos^2 \dfrac{t}{a}$.

892. 1) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 2) $r = \sqrt{2\varphi + \cos^2\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

893. $f(t) = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos t}$; вычислить

$$f'(\pi/2),\ f'(\pi),\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

894. $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$; найти $f'(1)$.

Найти производные функций:

895. $y = \sqrt{4x+\sin 4x}$. **896.** $y = x^2\sqrt{1-x^2}$.

897. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. **898.** $y = \sqrt[3]{1+\cos 6x}$.

899. 1) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; 2) $y = \sin^2 x^3$.

900. $y = \dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. **901.** $s = \sqrt{\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}}$.

902. $r = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$. **903.** $y = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$.

904. $f(t) = \sqrt{1+\cos^2 t^2}$; найти $f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

§ 3. Касательная и нормаль к плоской кривой

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке кривой $(x_0;\, y_0)$ *равен значению производной функции* $f(x)$ в точке x_0:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0) = y'|_{x=x_0}. \tag{1}$$

Число k называют иногда *наклоном* кривой в точке $(x_0;\, y_0)$.

Уравнение *касательной* в точке $M(x_0;\, y_0)$ на кривой (рис. 26):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2}$$

Уравнение *нормали*:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \tag{3}$$

где k определяется формулой (1).

Отрезки $TA = y_0 \operatorname{ctg} \varphi$, $AN = y_0 \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 26) называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*, а длины отрезков MT и MN — длинами касательной и нормали.

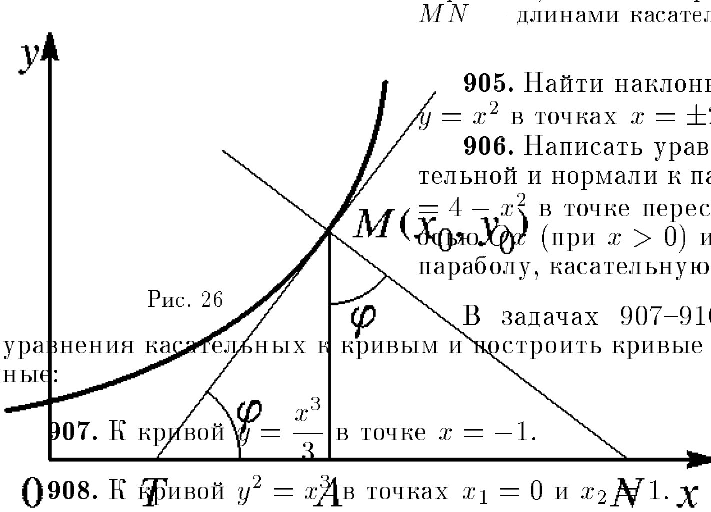

Рис. 26

905. Найти наклоны параболы $y = x^2$ в точках $x = \pm 2$.

906. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y = 4 - x^2$ в точке пересечения ее с осью Ox (при $x > 0$) и построить параболу, касательную и нормаль.

В задачах 907–910 написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные:

907. К кривой $y = \dfrac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$.

908. К кривой $y^2 = x^3$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

909. К локону $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$.

910. К синусоиде $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.

911. Под каким углом кривая $y = \sin x$ пересекает ось Ox?

912. Под каким углом пересекаются кривые

$$2y = x^2 \quad \text{и} \quad 2y = 8 - x^2?$$

913. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой: 1) $y = x^2$; 2) $y^2 = x^3$ в точке $x = 1$.

914. Доказать, что подкасательная параболы $y^2 = 2px$ равна удвоенной абсциссе точки касания, а поднормаль равна p.

915. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.

---

916. Написать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$ и найти угол между касательными. Построить кривую и касательные.

В задачах 917–919 написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные к ним:

917. $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

918. $y^2 = 4 - x$ в точках пересечения с осью Oy.

919. $y^2 = (4 + x)^3$ в точках пересечения с осями Ox и Oy.

920. Найти расстояние вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ от касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy.

921. Под каким углом прямая $y = 0{,}5$ пересекает кривую $y = \cos x$?

922. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox?

923. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

924. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$ в точке $x = 1$.

925. Какие углы образует парабола $y = \dfrac{x^2}{4}$ с ее хордой, абсциссы концов которой равны 2 и 4?

§ 4. Случаи недифференцируемости непрерывной функции

1°. Угловая точка. Точка $A(x_1; y_1)$ кривой $y = f(x)$ (рис. 27) называется *угловой*, если в этой точке производная y' не существует, но существуют *левая* и *правая* различные производные: $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k_1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k_2$. Из угловой точки выходят два касательных луча с наклонами k_1 и k_2.

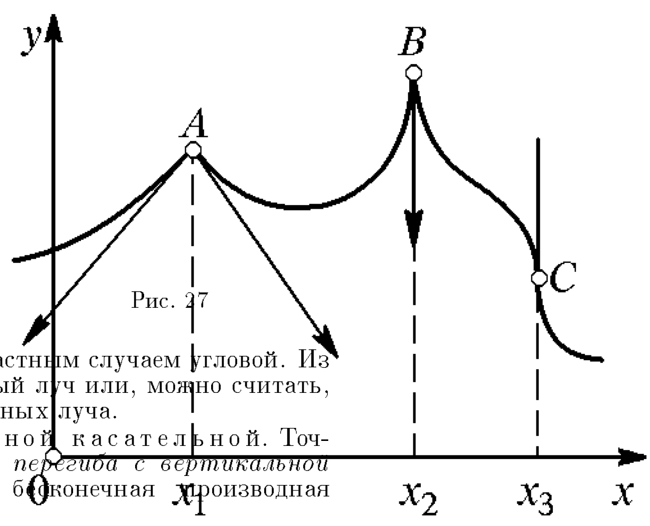

Рис. 27

2°. Точка возврата с вертикальной касательной. Точка $B(x_2; y_2)$ (рис. 27) называется *точкой возврата* с вертикальной касательной, если в этой точке производная y' не существует, но существуют *левая и правая бесконечные производные* разного знака ($+\infty$ и $-\infty$). Такая точка является частным случаем угловой. Из нее выходит один вертикальный касательный луч или, можно считать, что из нее выходят два слившихся касательных луча.

3°. Точка перегиба с вертикальной касательной. Точка $C(x_3; y_3)$ (рис. 27) называется *точкой перегиба с вертикальной касательной*, если в ней существует бесконечная производная

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ (или $-\infty$). В такой точке существует вертикальная касательная.

В точках A и B функция $y = f(x)$ не имеет производной; в точке C она имеет бесконечную производную. Во всех трех точках функция непрерывна, но *недифференцируема*.

926. Построить график функции $y = \sqrt{x^2}$ (или $y = |x|$) и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика.

927. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y = 0,5 \times \sqrt{(x-2)^2}$ и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика функции.

928. На отрезке $[-\pi, \pi]$ построить график функции $y = \sqrt{\sin^2 x}$ и написать уравнения касательных в угловой точке кривой.

929. На отрезке $[0, 2\pi]$ построить график функции $y = \sqrt{1 + \cos x}$, написать уравнения касательных в угловой точке кривой и найти угол между ними.

930. На отрезке $[-2, 2]$ построить график функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и написать уравнение касательной в точке $x = 0$.

931. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y = 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 2$.

932. На отрезке $[-2, 2]$ построить кривую $y^3 = 4x$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 0$.

933. На отрезке $[0, 4]$ построить кривую $y^3 = 4(2 - x)$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x = 2$.

---

934. На отрезке $[0, \pi]$ построить график функции $y = 1 - \sqrt{\cos^2 x}$ и написать уравнения касательных к кривой в угловой точке.

935. На отрезке $[-2, 0]$ построить график функции $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$ и написать уравнение касательной к кривой в точке $x = -1$.

936. На отрезке $[-1, 5]$ построить график функции $y = |4x - x^2|$ и написать уравнения касательных в угловой точке $x = 0$ и найти угол между ними.

§ 5. Производные логарифмических и показательных функций

Основные формулы:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'; \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Найти производные функций:

937. 1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

938. 1) $y = \ln x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$; 2) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

839. 1) $y = \ln(1+\cos x)$; 2) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

940. $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$.

941. $y = \ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$. **942.** $y = \ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

943. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$. **944** $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

945. $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$.

946. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x})$.

947. 1) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 2) $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

948. Написать уравнение касательной к кривой $y = \ln x$ в точке пересечения ее с осью Ox. Построить кривую и касательную.

949. Показать, что парабола $y = \dfrac{x^2}{2e}$ касается кривой $y = \ln x$, и найти точку касания. Построить кривые.

Найти производные функций:

950. 1) $y = x^2 + 3^x$; 2) $y = x^2\cdot 2^x$; 3) $y = x^2e^x$.

951. 1) $y = a^{\sin x}$; 2) $y = e^{-x^2}$; 3) $y = x^2e^{-2x}$.

952. $y = 2(e^{x/2} - e^{-x/2})$. **953.** $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.

954. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. **955.** $y = e^{x/a}\cos\dfrac{x}{a}$.

956. 1) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$; 2) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$.

957. $y = \ln\dfrac{e^x}{x^2+1}$. **958.** $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$.

959. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$; найти $f'(0)$.

960. Под каким углом кривая $y = e^{2x}$ пересекает ось Oy?

961. Доказать, что длина подкасательной в любой точке кривой $y = e^{x/a}$ равна a.

962. Предварительным логарифмированием найти производные функций: 1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\sin x}$.

Найти производные функций:

963. $y = \ln\cos x - \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

964. $y = \ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$. **965.** $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

966. $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$.

967. $y = \ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **968.** $y = \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x + \ln\cos x$.

969. $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$. **970.** $y = \ln(1+\sec x)$.

971. $y = a\ln\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right) - \sqrt{x^2+ax}$.

972. $y = ae^{-x/a} + xe^{-x/a}$. **973.** $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$.

974. $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. **975.** $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}\right)$.

976. $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$. **977.** $y = x^{1/x}$.

978. $f(t) = \ln\dfrac{2+\operatorname{tg} t}{2-\operatorname{tg} t}$; найти $f'(\pi/3)$.

979. Написать уравнение касательной к кривой $y = 1 - e^{x/2}$ в точке пересечения ее с осью Oy. Построить кривую, касательную и асимптоту кривой.

§ 6. Производные обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$
$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Найти производные функций:

980. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$.

981. $y = x - \operatorname{arctg} x$. **982.** $y = \arcsin \sqrt{1-4x}$.

983. $y = \arcsin \dfrac{x}{a}$. **984.** $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.

985. $y = \arccos(1-2x)$. **986.** $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

987. 1) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin(e^{3x})$.

988. $y = \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **989.** $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

990. $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2} \ln(x^2+a^2)$.

Найти производные функций:

991. $y = \arcsin \sqrt{x}$. **992.** $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}$.

993. 1) $y = \arccos(1-x^2)$; 2) $y = \operatorname{arcctg} x - \dfrac{1}{x}$.

994. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$.

995. $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

996. $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$.

997. $s = \sqrt{4t-t^2} + 4 \arcsin \dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

998. $y = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}$.

999. $f(z) = (z+1) \operatorname{arctg} e^{-2z}$; найти $f'(0)$.

§ 7. Производные гиперболических функций

1°. Определения. Выражения $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и их отношения называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом* и обозначаются

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

2°. Свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 4) $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$;

2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$; 5) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

3) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; 6) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Найти производные функций:

1000. 1) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 2) $y = x - \operatorname{th} x$; 3) $y = 2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$.

1001. $f(x) = \operatorname{sh}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$; найти $f'(0) + f(0)$.

1002. 1) $y = \ln[\operatorname{ch} x]$; 2) $y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$.

1003. 1) $y = x - \operatorname{cth} x$; 2) $y = \ln[\operatorname{th} x]$.

1004. 1) $y = \arcsin[\operatorname{th} x]$; 2) $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$.

1005. Линия $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ называется *цепной*. Написать уравнение нормали к этой линии в точке $x = a$. Построить кривую и нормаль.

1006. Написать уравнение касательной к кривой $y = \operatorname{sh} x$ в точке $x = -2$. Построить кривую и касательную к ней.

1007. Доказать, что проекция ординаты любой точки цепной линии $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ на ее нормаль есть величина постоянная, равная a.

§ 8. Смешанные примеры и задачи на дифференцирование

Найти производные функций:

1008. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \arcsin\dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln\cos x$.

1009. $y = \sqrt{4x - 1} + \operatorname{arcctg}\sqrt{4x - 1}$.

1010. $x = \ln(e^{2t} + 1) - 2\operatorname{arctg}(e^t)$.

1011. $y = 4\ln(\sqrt{x - 4}) + \sqrt{x^2 - 4x}$.

1012. $s = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t - \ln(\cos t)$.

1013. $f(x) = (x^2 + a^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} - ax$; найти $f'(a)$.

1014. 1) $y = \ln\left[x - \dfrac{a^2}{x}\right]$; 2) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

1015. $f(x) = \arcsin\dfrac{x - 1}{x}$; найти $f'(5)$.

1016. $\varphi(u) = e^{-u/a}\cos\dfrac{u}{a}$; показать, что $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$.

1017. $f(y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{a} - \ln\sqrt[4]{y^4 - a^4}$; найти $f'(2a)$.

1018. $F(z) = \dfrac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$; показать, что $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

1019. Показать, что функция $s = \dfrac{1}{t\ln ct}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t\dfrac{ds}{dt} + s = -ts^2$.

1020. Показать, что функция $x = \dfrac{t - e^{-t^2}}{2t^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^{-t^2}$.

§ 9. Производные высших порядков

Пусть мы нашли для функции $y = f(x)$ ее производную $y' = f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются и обозначаются

производная третьего порядка $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$,

производная четвертого порядка $y^{\mathrm{IV}} = f^{\mathrm{IV}}(x) = \dfrac{d^4y}{dx^4}$,

и вообще

производная n-го порядка $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

1021. Найти производную второго порядка функции:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1022. Найти производную третьего порядка функции:

1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = x\sin x$.

1023. Найти производную третьего порядка функции:

1) $y = x\ln x$; 2) $s = te^{-t}$; 3) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

1024. $s = \dfrac{t}{2}\sqrt{2 - t^2} + \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{2}}$; найти $\dfrac{d^3s}{dt^3}$.

Найти производную n-го порядка функции:

1025. 1) $e^{-x/a}$; 2) $\ln x$; 3) $\sqrt{x}$.

1026. 1) x^n; 2) $\sin x$; 3) $\cos^2 x$.

1027. Последовательным дифференцированием вывести формулы Лейбница:

$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$;

$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$;

$(uv)^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{IV}}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{\mathrm{IV}}$ и т. д.

1028. По формуле Лейбница найти производную второго порядка функции:

1) $y = e^x \cos x$; 2) $y = a^x x^3$; 3) $y = x^2 \sin x$.

1029. По формуле Лейбница найти производную третьего порядка функции:

1) $y = e^{-x} \sin x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = x \cos x$.

1030. $f(x) = xe^{x/a}$; найти $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$.

1031. $f(x) = (1+x)^m$; найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$.

1032. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$; показать, что при $n \geqslant 2$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}}n.$$

1033. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; показать, что

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & \text{при} \quad n = 2m, \\ 0 & \text{при} \quad n = 2m-1. \end{cases}$$

Указание. Применить тождество

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

1034. Продифференцировав тождество $(x-1)(x^2 + x^3 + \ldots$ $\ldots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ три раза по x и положив затем $x = 1$, найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1) = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}$ и затем сумму квадратов чисел натурального ряда

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1035. Найти производную второго порядка функции:

1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$; 3) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$.

1036. Найти производную n-го порядка функции:

1) $y = a^x$; 2) $y = \dfrac{1}{1+2x}$; 3) $y = \sin^2 x$.

1037. $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$; найти $f(2)$, $f'(2)$ и $f''(2)$.

1038. По формуле Лейбница найти производную третьего порядка функции:

1) $y = x^3 e^x$; 2) $y = x^2 \sin \dfrac{x}{a}$; 3) $y = xf'(a-x) + 3f(a-x)$.

1039. Показать, что функция $y = e^x \cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.

1040. Показать, что функция $y = xe^{-1/x}$ удовлетворяет уравнению $x^3 y'' - xy' + y = 0$.

1041. $f(x) = x^2 e^{-x/a}$; показать, что $f^{(n)}(0) = \dfrac{n(n-1)(-1)^n}{a^{n-2}}$.

1042. $f(x) = e^{-x^2}$; показать, что

$$f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0), \quad f^{(2m-1)}(0) = 0,$$
$$f^{2m}(0) = (-2)^m(2m-1)(2m-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

1043. $f(x) = x^n$; показать, что

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

§ 10. Производная неявной функции

Если уравнение $F(x, y) = 0$, неразрешенное относительно y, определяет y как однозначную функцию x, то y называется *неявной* функцией x. Чтобы найти производную y' этой неявной функции, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x. Из полученного уравнения найдем искомую производную y'. Чтобы найти y'', нужно уравнение $F(x, y) = 0$ дважды продифференцировать по x и т. д.

Найти y' из уравнений:

1044. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y^2 = 2px$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1045. 1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $x^2 + y^2 - xy = 0$.

1046. 1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; 2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1047. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

1048. $x = y + \operatorname{arcctg} y$.

1049. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$; найти $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = 0$.

1050. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + by - xy = c$; 3) $x^m y^n = 1$.

1051. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; найти y'' в точке $(0; b)$.

1052. Написать уравнения касательных к кривой $x^2+y^2+4x - 2y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Oy.

1053. Найти точки пересечения нормали гиперболы $x^2-y^2 = 9$, проведенной из точки $(5; 4)$, с асимптотами.

1054. Написать уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ к кривой:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^2 = 2px$.

1055. Написать уравнения касательных к астроиде $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ в точках пересечения ее с прямой $y = x$.

1056. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \text{и} \quad y^2 = 4x?$$

1057. Найти y' из уравнений:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

1058. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$;

3) $\operatorname{arctg} y = x + y$; 4) $x^2 + xy + y^2 = a^2$.

1059. Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Ox. Построить окружность и касательные.

1060. Написать уравнение касательной к эллипсу $x^2+4y^2 = 16$ в точке, в которой делится пополам отрезок касательной, отсеченный осями координат, и которая лежит в первой четверти.

1061. $te^{-s/2} + se^{-t/2} = 2$; найти $\dfrac{ds}{dt}$ при $t = 0$.

1062. $t \ln x - x \ln t = 1$; найти $\dfrac{dx}{dt}$ при $t = 1$.

1063. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; найти y' при $y = \pi/2$.

§ 11. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. имеет в этой точке конечную производную y', то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$; отсюда

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{1}$$

Главная часть $y'\Delta x$ приращения Δy функции, *линейная* относительно Δx, называется *дифференциалом* функции и обозначается dy:

$$dy = y'\Delta x. \tag{2}$$

Положив в формуле (2) $y = x$, получим $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, и поэтому

$$dy = y'\,dx. \tag{3}$$

Формула (3) верна и в том случае, если x есть функция новой переменной t.

Из (1) следует, что $\Delta y \approx dy$, т. е. при достаточно малом $dx = \Delta x$ *приращение* функции приближенно равно ее *дифференциалу*.

В частности, для линейной функции $y = ax + b$ имеем: $\Delta y = dy$.

Найти дифференциалы функций:

1064. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1065. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \dfrac{gt^2}{2}$.

1066. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \dfrac{1}{t^2}$.

1067. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

1068. 1) $d\left(\dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln\alpha)$;

3) $d\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$; 4) $d\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$.

1069. Нахождением дифференциала каждого члена уравнения найти $\dfrac{dy}{dx}$ из уравнений:

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $xy = a^2$; 3) $x^2 - xy - y^2 = 0$.

1070. 1) $y = x^2$; найти приближенно изменение y ($\Delta y \approx dy$), когда x изменяется от 2 до 2,01; 2) $y = \sqrt{x}$; найти приближенно изменение y, когда x изменяется от 100 до 101.

1071. 1) Сторона куба $x = 5\,\text{м} \pm 0,01\,\text{м}$. Определить абсолютную и относительную погрешность при вычислении объема куба.

2) Длина телеграфного провода $s = 2b\left(1+\dfrac{2f^2}{3b^2}\right)$, где $2b$ — расстояние между точками подвеса, а f — наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f, когда провод от нагревания удлинится на ds?

1072. 1) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $y = x^2\sqrt{x}$ при $x \leqslant 1$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

2) С какой относительной точностью нужно измерить радиус шара, чтобы при вычислении объема шара допустить погрешность не более 1 %?

1073. Определить приближенно: 1) площадь кругового кольца; 2) объем сферической оболочки. Сравнить с их точными значениями.

Найти дифференциалы функций:

1074. 1) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; 2) $r = \cos(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

1075. 1) $y = \ln\cos x$; 2) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{4u-1}$; 3) $s = e^{-2t}$.

1076. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

1077. 1) $y = x^3$; определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98.

2) Период колебания маятника $T = 2\pi\sqrt{l/980}$ с, где l — длина маятника в сантиметрах. Как нужно изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 с?

3) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $xy = 4$ при $x \geqslant 0,5$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

§ 12. Параметрические уравнения кривой

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$. Обозначая точками производные по параметру, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\dot y/\dot x)}{dx} = \frac{\ddot y\dot x - \ddot x\dot y}{\dot x^3}.$$

1078. Построить кривые по параметрическим уравнениям:

1) $x = t^2$, $y = \dfrac{1}{2}t^3$; 2) $x = t^2$, $y = \dfrac{t^3}{3} - t$.

Исключив из уравнений t, написать уравнение каждой кривой в обычном виде: $F(x, y) = 0$.

Привести к виду $F(x, y) = 0$ (или $y = f(x)$) уравнения кривых, заданных параметрически:

1079. 1) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1080. 1) $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$;

2) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \cos^2 t$.

1081. Построить «развертку», или «эвольвенту», круга (см. задачу 368)

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t),$$

давая t значения: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π.

1082. Положив $y = xt$, получить параметрические уравнения «декартова листа» $x^3+y^3-3axy = 0$ (см. задачу 366) и исследовать движение точки по кривой при монотонном изменении t: 1) от 0 до $+\infty$; 2) от 0 до -1; 3) от $-\infty$ до -1.

1083. Написать уравнение касательной к циклоиде (см. задачу 367) $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ в точке, где $t = \pi/2$. Построить кривую и касательную.

1084. Написать уравнение касательной к гипоциклоиде (астроиде) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в точке $t = \pi/4$. Построить кривую и касательную.

Указание. Для построения кривой составить таблицу значений x и y при $t = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$; $3\pi/4$ и т. д.

1085. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $x = t^2$, $y = \dfrac{t^3}{3} - t$;

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1086. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

1) $x = 2t - 1$, $y = 1 - 4t^2$; 2) $x = t^3$, $y = t^2 - 2$,

найдя точки пересечения их с осями координат и заметив, что для второй кривой $\dfrac{dy}{dx} = \infty$ при $t = 0$. Написать уравнения кривых в виде $F(x, y) = 0$.

1087. Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в точке $t = 3\pi/2$. Построить кривую и касательную.

1088. Написать уравнение касательной к развертке круга

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

в точке $t = \pi/4$.

1089. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

1) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$; 2) $x = t^2$, $y = t + t^3$;

3) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.