

## Глава 6

### УПРУГИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

При анализе упругих свойств кристаллов будем считать кристалл однородной непрерывной средой, не учитывая дискретности его строения. Данное приближение называется *континуальным* и соответствует фононному спектру, взятому при  $\mathbf{K} \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) (*длинноволновое приближение*). Соответственно, это приближение оправданно при длинах упругих волн, превышающих  $10^{-6}$  см, что много больше межатомных расстояний, и частотах менее  $10^{11} \leftrightarrow 10^{12}$  Гц.

Эта область частот имеет большое значение для физики твердого тела. Ультразвуковые волны используют для измерения упругих постоянных, изучения дефектов строения и ангармонизма кристаллической решетки, электронной структуры металлов и сверхпроводников. Существуют многочисленные технологические применения волн ультразвуковых частот: ультразвуковая дефектоскопия, сварка и очистка металлов, изготовление эмульсий и т. д.

Ряд уникальных (упругих и пьезоэлектрических) свойств кристаллов нашел широкое применение в пьезотехнике и акустоэлектронике.

#### 6.1. Малые деформации упругой сплошной среды

При деформации упругой сплошной среды, как изотропной, так и анизотропной, ее частицы смещаются из своих первоначальных положений. Пусть частица, находившаяся до деформации в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  с координатами  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), после деформации оказывается в положении  $\mathbf{r}'$  с координатами  $x'_i$ . Введем *вектор смещения*:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' \leftrightarrow \mathbf{r}, \quad u_i = x'_i \leftrightarrow x_i, \quad (6.1)$$

задающий абсолютную деформацию среды. Очевидно, что задание во всем объеме твердого тела векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  полностью определит деформированное состояние. Однако удобнее использовать относительные величины, также характеризующие деформированное состояние и определенным образом связанные с (6.1). Условимся, что все деформации твердого тела рассматриваются в пределах выполнения закона Гука: *в упругом твердом теле де-*

формация прямо пропорциональна напряжению. Считаем также, что деформационные циклы обратимы. Для того, чтобы представить себе деформацию упругой среды, рассмотрим частицу вместе с некоторой бесконечно малой окрестностью. Тогда можно разложить деформацию на три движения:

- 1) поступательное движение частицы вместе с окрестностью из точки  $\mathbf{r}$  в точку  $\mathbf{r}'$ ;
- 2) поворот окрестности как целого твердого тела вокруг некоторой оси, проходящей через частицу (точку  $\mathbf{r}'$ );
- 3) собственно деформацию, т. е. такое перемещение одних частиц окрестности относительно других, при котором изменяются расстояния между частицами.

Поступательное перемещение частицы вместе с окрестностью определяется вектором  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Остальные два перемещения задаются производными вектора смещения по координатам.

Пусть внутри недеформированного твердого тела задана ортогональная ортонормированная система координат, определяемая

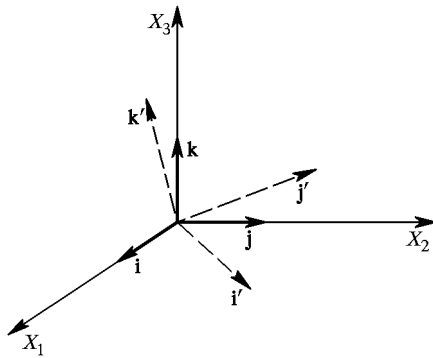


Рис. 6.1. Координатные оси для описания упругой деформации

тройкой единичных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (рис. 6.1). Предположим, что в результате малой однородной деформации, при которой все элементарные объемы кристалла деформируются одинаково, данная тройка векторов изменила свою ориентацию, и длина каждого из векторов также изменилась, в результате чего образовалась новая тройка векторов  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ , в общем случае не ортогональных и не единичных.

Рассмотрим простейший случай равномерного изменения размера кристаллического образца вдоль оси  $X$  ( $X_1$ ) (рис. 6.2). Вектор смещения точки вдоль этой оси будет пропорционален радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , длина которого в данном случае равна  $x$ . Тогда можно записать:

$$\frac{u_x}{x} = \frac{u_1}{x} = \frac{\Delta l}{l}, \quad (6.2)$$

где  $l, \Delta l$  — абсолютное значение и относительное изменение размера образца вдоль оси  $X$ . Соотношение (6.2) можно переписать так:

$$u_x = \epsilon_{xx}x, \quad u_1 = \epsilon_{11}x. \quad (6.3)$$

Для произвольных бесконечно малых приращений коэффициент пропорциональности в (6.3) будет равен

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (6.4)$$

Эта величина определяет *относительное растяжение* образца

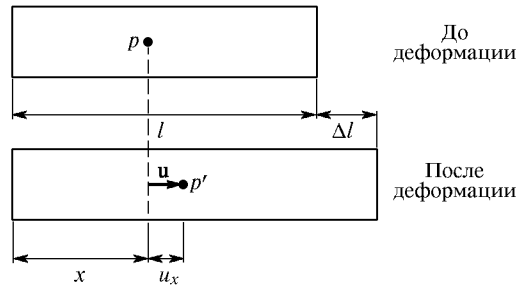


Рис. 6.2. Однородная деформация растяжения

вдоль оси  $x$ . Соответствующие относительные растяжения образца вдоль осей  $y$  и  $z$  могут быть записаны в виде

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \quad (6.5)$$

Для описания сдвиговых деформаций выделим внутри образца малый (элементарный) объем, который в результате воздействия изменяется так, что меняются углы между его ребрами (рис. 6.3).

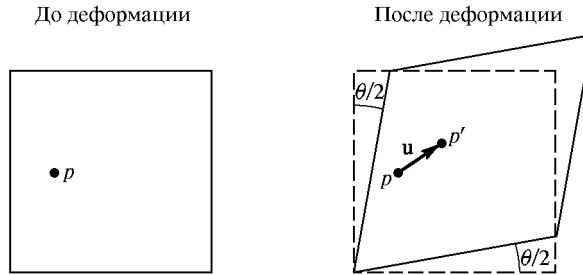


Рис. 6.3. Однородная деформация сдвига

При такой деформации кубик может превратиться в параллелепипед. Проекция вектора смещения на оси  $x$  и  $y$  можно выразить так:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{u_1}{y}, \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{u_2}{x}, \quad (6.6)$$

или, при малых углах деформации

$$u_1 = \frac{\theta}{2}y, \quad u_2 = \frac{\theta}{2}x. \quad (6.7)$$

Таким образом, деформацию сдвигового типа можно описать с помощью соотношений вида

$$u_1 = e_{12}y, \quad u_2 = e_{21}x, \quad (6.8)$$

где

$$e_{12} = e_{21} = \frac{\theta}{2}. \quad (6.9)$$

Используя (6.9), эти величины, аналогично (6.5), можно представить так:

$$e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad e_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (6.10)$$

Предположим, однако, что смещения (6.7) имеют несколько иной вид:

$$u_1 = \frac{\theta}{2}y, \quad u_2 = \frac{\theta}{2}x. \quad (6.11)$$

Хотя соотношения (6.11) напоминают (6.7), при таком перемещении элементарный объем претерпевает простой поворот на угол  $\theta/2$  (рис. 6.4).

При этом относительное положение атомов вещества не меняется. Нужно исключить чистое вращение из определения дефор-

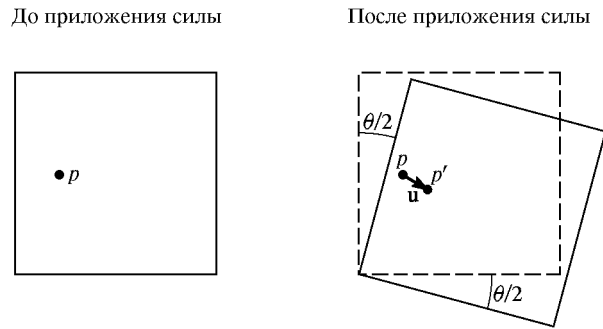


Рис. 6.4. Однородный поворот. Деформаций нет

мации сдвига. Указанием может служить то, что, если  $\partial u_1/\partial y$  и  $\partial u_2/\partial x$  равны по величине и противоположны по знаку, никакой

деформации нет. Этому условию можно удовлетворить с помощью определения

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right). \quad (6.12)$$

Для других *сдвиговых деформаций*, аналогично (6.12), можем записать:

$$\begin{aligned} e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \\ e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

В общем случае, когда присутствуют оба типа деформации, можно представить и величины (6.4)–(6.5), и величины (6.12)–(6.13) одним соотношением

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.14)$$

где индексы  $i, j$  пробегает значения от 1 до 3,  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ . Определение (6.14) представляет симметричный *тензор бесконечно малых деформаций*, имеющий 6 независимых компонент.

Подсчитаем относительное изменение элементарного объема в окрестности точки  $\mathbf{r}$  при деформации. Используя (6.1), можно записать:

$$u_i(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k = u_i(\mathbf{r}) + e_{ik} \delta x_k, \quad (6.15)$$

либо в векторной форме:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}'_i &= \delta\mathbf{r}_i + e_{ik} \delta\mathbf{r}_k, \\ \delta\mathbf{r}'_1 &= (1 + e_{11})\delta\mathbf{r}_1 + e_{12}\delta\mathbf{r}_2 + e_{13}\delta\mathbf{r}_3, \\ \delta\mathbf{r}'_2 &= e_{12}\delta\mathbf{r}_1 + (1 + e_{22})\delta\mathbf{r}_2 + e_{23}\delta\mathbf{r}_3, \\ \delta\mathbf{r}'_3 &= e_{13}\delta\mathbf{r}_1 + e_{23}\delta\mathbf{r}_2 + (1 + e_{33})\delta\mathbf{r}_3 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Принимая, что  $|\delta\mathbf{r}_1| = |\delta\mathbf{r}_2| = |\delta\mathbf{r}_3| = 1$ , получаем, что после деформации единичный куб  $\delta V = 1$  с ребрами  $\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \delta\mathbf{r}_3$ , будет

иметь объем

$$\begin{aligned} \delta V' &= \delta \mathbf{r}'_1 [\delta \mathbf{r}'_2, \delta \mathbf{r}'_3] = \\ &= \begin{vmatrix} 1 + e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & 1 + e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & 1 + e_{33} \end{vmatrix} \delta V \approx \\ &\approx (1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \delta V. \end{aligned} \quad (6.17)$$

При записи (6.17) были опущены все члены, кроме линейных. Тогда относительное изменение объема (*объемное расширение*) можно представить так:

$$\Delta = \frac{\delta V' \Leftrightarrow \delta V}{\delta V} \approx e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad (6.18)$$

т.е. как сумму диагональных компонент тензора деформации. При всестороннем сжатии объемное расширение считают отрицательным.

## 6.2. Механические напряжения

При деформации кристалла возникают силы упругости, стремящиеся восстановить начальную конфигурацию. В результате в твердом теле появляются *механические напряжения*, которые определяют как силы, действующие на единичные площадки внутри кристалла. В твердых телах возможны как нормальные (сила дей-

ствует перпендикулярно на единичную площадку), так и сдвиговые, или тангенциальные, напряжения (действующая сила лежит в плоскости единичной площадки). Для анизотропного твердого тела следует различать 9 компонент *тензора напряжений*  $\sigma_{ij}$ . На рис. 6.5 показан элементарный объем в виде куба с гранями единичной площади и компонентами напряжений. Приняты обозначения: первый индекс соответствует координатной оси, вдоль которой направлена сила, второй индекс — оси, задающей ориентацию единичной площадки, к которой приложена сила. Например, величина  $\sigma_{11}$  обозначает компоненту силы, действующую вдоль оси  $X_1$  на единичную площадку, перпендикулярную этой оси, величина  $\sigma_{12}$  — компоненту силы,

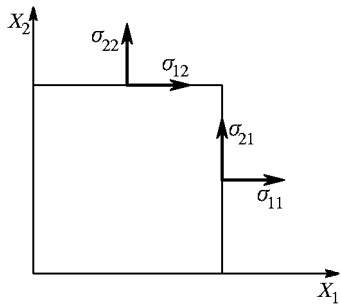


Рис. 6.5. Компоненты напряжений в твердом теле

действующую вдоль оси  $X_1$  на единичную площадку, перпендикулярную к оси  $X_2$  и т. п. Компоненты  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  являются *нормальными напряжениями*,  $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$  — *сдвиговыми* (тангенциальными) *напряжениями*.

Покажем, что тензор напряжений симметричен. Для этого достаточно рассмотреть проекцию элементарного объема, находящегося в равновесии внутри однородного твердого тела, на плоскость  $X_1X_2$  (рис. 6.6).

Если предположить, например, что  $\sigma_{12} > \sigma_{21}$ , то, очевидно, возникает вращающий механический момент, стремящийся повернуть элементарный объем по часовой стрелке. Однако элемен-

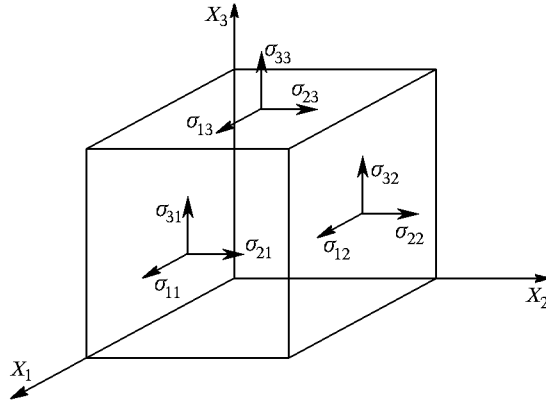


Рис. 6.6. К доказательству симметричности тензора напряжений

тарный объем внутри напряженного твердого тела должен оставаться в равновесии. Следовательно, необходимо, чтобы выполнялись условия  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ , или, в общем случае,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Следовательно, в общем случае тензор напряжений имеет 6 независимых компонент.

### 6.3. Закон Гука и упругие постоянные кристаллов

Будем предполагать, что закон Гука справедлив для любого элементарного объема однородного твердого тела, т. е. что напряжения всюду пропорциональны деформациям. Согласно закону Гука, каждая компонента напряжений линейно связана с каждой компонентой деформации. Эти соотношения в явном виде образуют систему линейных уравнений с 81 коэффициентами, которые называются *постоянными упругой жесткости*, или модулями упругости:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{1111}e_{11} + C_{1122}e_{22} + C_{1133}e_{33} + C_{1123}e_{23} + C_{1113}e_{13} + C_{1112}e_{12}, \\
\sigma_{22} &= C_{2211}e_{11} + C_{2222}e_{22} + C_{2233}e_{33} + C_{2223}e_{23} + C_{2213}e_{13} + C_{2212}e_{12}, \\
\sigma_{33} &= C_{3311}e_{11} + C_{3322}e_{22} + C_{3333}e_{33} + C_{3323}e_{23} + C_{3313}e_{13} + C_{3312}e_{12}, \\
\sigma_{23} &= C_{2311}e_{11} + C_{2322}e_{22} + C_{2333}e_{33} + C_{2323}e_{23} + C_{2313}e_{13} + C_{2312}e_{12}, \\
\sigma_{13} &= C_{1311}e_{11} + C_{1322}e_{22} + C_{1333}e_{33} + C_{1323}e_{23} + C_{1313}e_{13} + C_{1312}e_{12}, \\
\sigma_{12} &= C_{1211}e_{11} + C_{1222}e_{22} + C_{1233}e_{33} + C_{1223}e_{23} + C_{1213}e_{13} + C_{1212}e_{12}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Ясно, что в силу симметрии тензоров деформаций и напряжений, равны между собой компоненты вида  $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{jilk}$ , благодаря чему в (6.19) остается 36 независимых компонент  $C_{ijkl}$ . В свернутом виде система уравнений (6.19) может быть компактно записана, если применить правило суммирования Эйнштейна по дважды повторяющемуся индексу:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} e_{kl}. \tag{6.20}$$

Далее, также как и в (6.20), по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Коэффициенты  $C_{ijkl}$  в (6.20) образуют тензор 4 ранга. Размерность величин  $[C] = [\text{Н}/\text{м}^2] = [\text{Па}]$ . Важнейшим следствием соотношений (6.19) и (6.20) является то, что напряжения и деформации не обязательно совпадают по направлению, причем нормальные деформации могут вызывать сдвиговые напряжения, и наоборот.

В силу симметрии тензоров деформации и напряжений ясно, что можно использовать более экономную форму записи, если принять соглашение, что парные индексы могут быть записаны в матричной форме так (*обозначения Фохта*):

$$\begin{aligned}
11 &\Leftrightarrow 1, \\
22 &\Leftrightarrow 2, \\
33 &\Leftrightarrow 3, \\
23, 32 &\Leftrightarrow 4, \\
13, 31 &\Leftrightarrow 5, \\
12, 21 &\Leftrightarrow 6.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Тогда уравнения (6.20) в матричной форме примут вид

$$\sigma_{\alpha} = C_{\alpha\beta} e_{\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6. \tag{6.22}$$



Закон Гука может быть представлен иначе: каждая компонента деформации линейно связана с каждой компонентой напряжений:

$$e_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (6.23)$$

Коэффициенты  $S_{ijkl}$  в (6.23) образуют тензор 4 ранга и называются *упругими податливостями*. Размерность этих величин  $[S] = [M^2/N]$ . Закон Гука в форме (6.20) обычно применяют для описания процессов в условиях *постоянства деформаций*, или в *механически зажатом кристалле*. Форма (6.23) применяется в условиях свободных деформаций кристалла (*кристалл механически свободен*) и малости механических напряжений.

Найдем плотность упругой энергии твердого тела, подвергнутого механическому напряжению. Для случая, когда изотропное упругое тело с жесткостью  $k$  под действием силы  $F$  деформировано на величину  $x$ , работа, затраченная на такую деформацию, может быть вычислена с помощью известного соотношения:

$$w = \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.24)$$

Аналогично для анизотропного твердого тела плотность упругой потенциальной энергии, запасенной за счет внутренних напряжений в материале в любой его единице объема, может быть представлена так:

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl}. \quad (6.25)$$

Дифференцируя (6.25) по деформации, можно получить выражение для тензора напряжений (6.20):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{2} \left( C_{ijkl}e_{kl} + C_{ijkl}e_{ij} \frac{\partial e_{kl}}{\partial e_{ij}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (C_{ijkl}e_{kl} + C_{ijkl}e_{ij}\delta_{ki}\delta_{lj}) = C_{ijkl}e_{kl}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Дважды дифференцируя по деформации соотношение (6.25) или один раз — соотношение (6.26), получим определение тензора упругих постоянных:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}. \quad (6.27)$$

Из соотношения (6.27) следует, что порядок дифференцирования не важен, благодаря чему пары индексов  $ij$  и  $kl$  могут быть переставлены без изменения тензора  $C_{ijkl}$ . Данное обстоятельство уменьшает число независимых компонент тензора, так что, например,  $C_{1233} = C_{3312}$  и т. п. В результате в самом общем случае низкосимметричных кристаллов тригональной симметрии вместо 36 остается 21 независимая компонента тензора упругости.

#### 6.4. Упругие постоянные и упругий модуль всестороннего сжатия кубических кристаллов

Число независимых упругих постоянных зависит от точечной симметрии, и для самых высокосимметричных кристаллов — кубических — минимально и равно трем:  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ . Для доказательства представим в явном виде плотность упругой энергии:

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \frac{1}{2}(C_{1111}e_{11}^2 + C_{2222}e_{22}^2 + C_{3333}e_{33}^2 + \\ + 2C_{1112}e_{11}e_{12} + \dots + 2C_{1122}e_{11}e_{22} + \dots + 4C_{2323}e_{23}^2 + \dots). \quad (6.28)$$

Координатные оси  $X$  ( $X_1$ ),  $Y$  ( $X_2$ ),  $Z$  ( $X_3$ ) в кубических кристаллах эквивалентны, поскольку переводятся одна в другую действием элементов симметрии, например осью симметрии третьего порядка (четыре таких оси непременно присутствуют в любой из групп симметрии кубических кристаллов). Физические свойства вдоль эквивалентных направлений также должны быть одинаковы. Например, должна быть одинакова жесткость на растяжение как в направлении оси  $X$ , так и осей  $Y$  и  $Z$ . Следовательно, если изменить определения осей в выражении (6.28), энергия измениться не должна. Поэтому для кубического кристалла должны выполняться равенства

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}. \quad (6.29)$$

Кубический кристалл симметричен при отражении относительно любой плоскости симметрии, перпендикулярной любой из осей координат. Ничего не должно измениться, если заменить, например,  $y \rightarrow \Leftrightarrow y$ . Но такое изменение меняет компоненту деформации  $e_{xy} \rightarrow \Leftrightarrow e_{xy}$ , так как перемещение в направлении  $+y$  теперь должно происходить в направлении  $\Leftrightarrow y$ . Чтобы при этом не изменялась энергия кристалла,  $C_{1112}$  должно превратиться в  $\Leftrightarrow C_{1112}$ . Однако отраженный кристалл не отличается от начального, поэтому должно выполняться

$$C_{1112} = \Leftrightarrow C_{1112} = 0. \quad (6.30)$$

Нулю равны только те компоненты упругости кубического кристалла, для которых один и тот же индекс ( $x$ , или  $y$ , или  $z$ ) координатной оси встречается нечетное число раз (один или три). Кроме того, если заменить все индексы  $x$  на  $y$  (или  $z$ ) и наоборот, компоненты упругости кубического кристалла будут инвариантны относительно такой замены. Следовательно, остаются лишь три независимых и не равных нулю компоненты тензора упругих постоянных:

$$\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = C_{11} = C_{22} = C_{33}, \\ C_{1122} = C_{2233} = C_{1133} = C_{12} = C_{23} = C_{13}, \\ C_{2323} = C_{1313} = C_{1212} = C_{44} = C_{55} = C_{66}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

При записи (6.31) введены также, согласно правилу (6.21), сокращенные (матричные) обозначения упругих постоянных.

Используя (6.31), плотность упругой энергии кубического кристалла можно представить так:

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \frac{1}{2}(C_{1111}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2C_{1122}(e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{33}e_{22}) + 4C_{2323}(e_{23}^2 + e_{13}^2 + e_{12}^2)). \quad (6.32)$$

С учетом сказанного, закон Гука (6.19) для кубических кристаллов удобно представить в матричной форме:

$$(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Для кубических кристаллов легко определить объемный модуль упругости, выраженный через макроскопические упругие постоянные. Пусть кристалл подвергается всестороннему растяжению, так что остаются ненулевыми только такие компоненты деформации:

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = \frac{\xi}{3}. \quad (6.34)$$

Подстановка (6.34) в (6.32) дает плотность упругой энергии в этом случае:

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \frac{1}{6}(C_{11} + 2C_{12})\xi^2. \quad (6.35)$$

Объемный модуль упругости можно определить с помощью соотношения

$$W = \frac{1}{2}B\xi^2 \quad \left( \text{ср. } W = \frac{1}{2}kx^2 \right). \quad (6.36)$$

Сравнивая (6.36) и (6.35), окончательно получим:

$$B = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12}). \quad (6.37)$$

Сжимаемость  $\chi$  определяется как величина, обратная объемному модулю упругости:  $\chi = B^{-1}$ . Физически объемный модуль упругости является мерой напряжений, возникающих в кубическом кристалле при гидростатическом сжатии или всестороннем однородном растяжении.

### 6.5. Вычисление упругих постоянных кубических кристаллов

Рассмотрим случай ионного кубического кристалла со структурой типа NaCl. При деформации кристалла меняется его потенциальная энергия, для вычисления которой необходимо знать, как движутся атомы. Будем предполагать приближенно следующий простой закон взаимодействия: между соседними атомами действуют только *центральные*, т. е. действующие вдоль линии, соединяющей два соседних атома, силы, причем природа этих сил — кулоновская. Предполагается учесть взаимодействие каждого атома с *ближайшими* к нему и *следующими за ближайшим* соседями (рис. 6.7). Представим, что каждая пара атомов связана

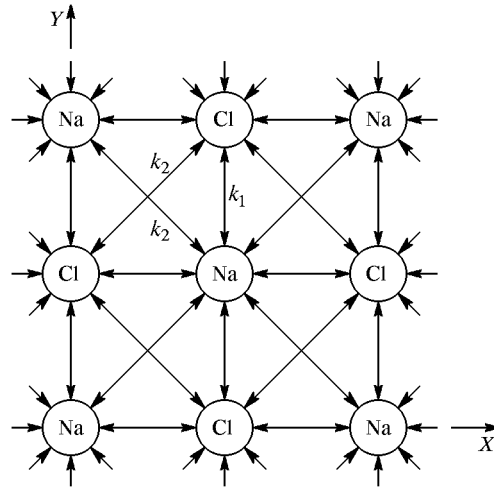


Рис. 6.7. Модель ионного кристалла с центральным взаимодействием

пружиной. Все пружинки между атомами Na и Cl должны иметь одинаковую жесткость  $k_1$ . Пружинки между двумя атомами Na и двумя атомами Cl могут иметь разную жесткость, но для упрощения представим, что их жесткость одинакова и равна  $k_2$ .

На рис. 6.7 показана одна из базовых плоскостей кристалла. Предположим, что в кристалле существует однородная деформация  $e_{ij}$ . В общем случае будут существовать все компоненты, но пока

будем рассматривать только деформации с тремя компонентами:  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{22}$ . Если один из атомов выбрать за начало координат, то перемещение любого другого атома в плоскости  $xy$  будет задано уравнениями

$$\begin{aligned} u_1 &= \epsilon_{11}x + \epsilon_{12}y, \\ u_2 &= \epsilon_{12}x + \epsilon_{22}y. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Обозначим номером  $1$  атом натрия с координатами  $x = 0$  и  $y = 0$  (рис. 6.8). Обозначая расстояние по горизонтали и вертикали че-

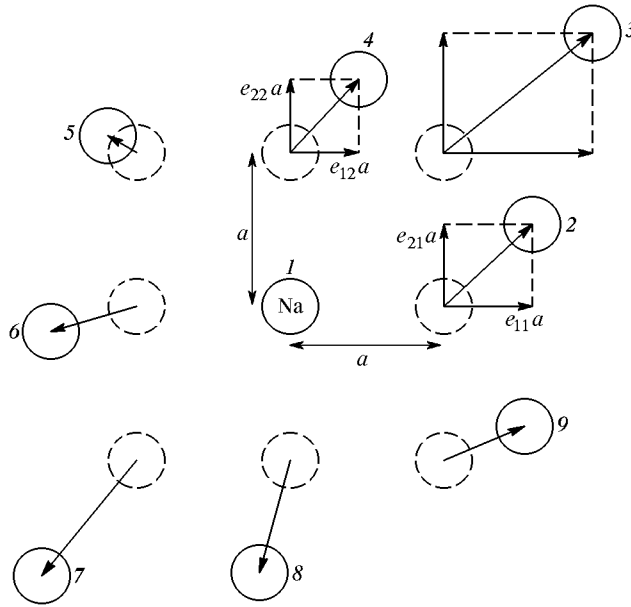


Рис. 6.8. Смещения атомов в плоскости  $xy$  при деформации кристаллов

рез  $a$ , для ближайших и следующих за ближайшими атомов в соответствии с рис. 6.8 получим компоненты смещений, приведенные в табл. 6.1.

Вычислим энергию, запасенную при деформации в упругих связях атомов. Например, для горизонтальной пружинки между атомами  $1$  и  $2$  получим:

$$w_{12} = \frac{1}{2}k_1(\epsilon_{11}a)^2. \tag{6.39}$$

С точностью до членов первого порядка  $y$ -перемещение атома  $2$  не вызывает изменения длины пружинки между атомами  $1$  и  $2$ . Одна-

Таблица 6.1. Смещения атомов в плоскости  $xy$  при деформации кубического кристалла

Атом	Координаты атомов	$u_1$	$u_2$	$k$
1	0, 0	0	0	—
2	$a, 0$	$e_{11}a$	$e_{21}a$	$k_1$
3	$a, a$	$(e_{11} + e_{12})a$	$(e_{21} + e_{22})a$	$k_2$
4	$0, a$	$e_{12}a$	$e_{22}a$	$k_1$
5	$-a, a$	$(-e_{11} + e_{12})a$	$(-e_{21} + e_{22})a$	$k_2$
6	$-a, 0$	$-e_{11}a$	$-e_{21}a$	$k_1$
7	$-a, -a$	$-(e_{11} + e_{12})a$	$-(e_{21} + e_{22})a$	$k_2$
8	$0, -a$	$-e_{12}a$	$-e_{22}a$	$k_1$
9	$a, -a$	$(e_{11} - e_{12})a$	$(e_{21} - e_{22})a$	$k_2$

ко, чтобы вычислить энергию деформации диагональной пружинки, нужно учесть изменение длины пружинки между атомами 1–3. Исходя из рис. 6.8, запишем для новой длины пружинки 1–3:

$$l^2 = (a + u_1)^2 + (a + u_2)^2 = 2a^2 + 2au_1 + 2au_2 + u_1^2 + u_2^2 \approx \\ \approx 2(a^2 + au_1 + au_2),$$

$$l = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + au_1 + au_2} = a\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{a}(u_1 + u_2)\right)^{1/2} \approx \\ \approx a\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2a}(u_1 + u_2)\right) = l_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2). \quad (6.40)$$

При записи (6.40) учтено, что компоненты смещений малы по сравнению с межатомным расстоянием, благодаря чему можно пренебречь квадратами этих величин. Тогда для атома 3 смещение в результате деформации составит

$$\Delta l = |\mathbf{u}^{(3)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2), \quad (6.41)$$

и для энергии диагональной пружинки, связывающей атомы 1 и 3, с учетом табл. 6.1, получим:

$$w_{13} = \frac{1}{2}k_2|\mathbf{u}^{(3)}|^2 = \frac{1}{4}k_2a^2(e_{11} + e_{21} + e_{12} + e_{22})^2. \quad (6.42)$$

Чтобы получить полную энергию всех пружинок в плоскости  $xy$ , необходимо записать сумму из 8 слагаемых вида (6.39) и (6.42).

Обозначая эту энергию через  $W_0$ , получим:

$$\begin{aligned}
 W_0 = & \frac{a^2}{2} \left( k_1 e_{11}^2 + \frac{1}{2} k_2 (e_{11} + e_{21} + e_{12} + e_{22})^2 + k_1 e_{22}^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} k_2 (e_{11} \Leftrightarrow e_{21} \Leftrightarrow e_{12} + e_{22})^2 + k_1 e_{11}^2 + \frac{1}{2} k_2 (e_{11} + e_{21} + e_{12} + e_{22})^2 + \\
 & \left. + k_1 e_{22}^2 + \frac{1}{2} k_2 (e_{11} \Leftrightarrow e_{21} \Leftrightarrow e_{12} + e_{22})^2 \right). \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

Хотя мы рассматриваем только  $x$ - и  $y$ -компоненты деформации, вклад в них дают «пружинки»-диагональные соседи, расположенные также вне плоскости  $xy$ . Таких соседей — 8. Выражение для удлинения таких диагональных пружин будет аналогично (6.41), но в него должна быть включена компонента  $u_3$ :

$$\Delta \tilde{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_3), \quad \Delta \hat{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 + u_3). \quad (6.44)$$

Однако в соотношения для энергии взаимодействий в плоскости  $xy$  величина  $u_3$  не входит, благодаря чему вклад от этих пружин имеет вид

$$W_{\text{диаг}} = 4 \frac{k_2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e_{11} a \right)^2 + 4 \frac{k_2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e_{22} a \right)^2 = k_2 a^2 (e_{11}^2 + e_{22}^2). \quad (6.45)$$

Результирующая энергия равна сумме соотношений (6.43) и (6.45). Необходимо, однако, принять во внимание, что это — удвоенное значение энергии деформации, связанной с одним атомом в начале координат, поскольку на каждый из двух атомов, связанных пружиной, должно приходиться по 1/2 ее энергии. Поскольку в единице объема находится  $1/a^3$  атомов, то плотность упругой энергии можно вычислить так:

$$W = \frac{W_0 + W_{\text{диаг}}}{2a^3}. \quad (6.46)$$

Упругие постоянные связаны с плотностью энергии  $W$  соотношением (6.32). Чтобы найти компоненты тензора  $C_{ijkl}$ , нужно сравнить коэффициенты при соответствующих комбинациях степеней деформаций в (6.46) с аналогичными значениями в сумме (6.32). Например, множитель при  $e_{11}^2$  ( $e_{22}^2$ ) одинаков и равен  $(1/a)(k_1 + 2k_2)$ , поэтому получаем:

$$C_{1111} = C_{2222} = \frac{1}{a}(k_1 + 2k_2). \quad (6.47)$$

Аналогично можно получить:

$$C_{1122} = C_{2211} = \frac{k_2}{a}. \quad (6.48)$$

$$C_{1212} = C_{2121} = \frac{k_2}{a}. \quad (6.49)$$

Все остальные упругие постоянные в кубическом кристалле равны нулю. Ясно также, что упругие постоянные прямо пропорциональны силовым константам и обратно пропорциональны длине химической связи (расстоянию между атомами). Из (6.48) и (6.49) следует, что для принятой модели взаимодействия атомов посредством только центральных сил должно выполняться равенство упругих констант:

$$C_{1122} = C_{1212} \quad (C_{12} = C_{23} = C_{13} = C_{44} = C_{55} = C_{66}). \quad (6.50)$$

Равенство (6.50) носит название *соотношения Коши*. В табл. 6.2 приведены значения упругих постоянных некоторых кубических кристаллов.

Таблица 6.2. Упругие постоянные кубических кристаллов (10 Па)

Кристалл	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$
Na (210K)	0,055	0,042	0,049
K	0,046	0,037	0,026
Fe	2,37	1,41	1,16
Al	1,08	0,62	0,28
W	5,01	1,98	1,51
LiF	1,19	0,54	0,53
NaCl	0,486	0,127	0,128
KCl	0,40	0,062	0,062
NaBr	0,33	0,13	0,13
KI	0,27	0,043	0,042
MgO	2,86	0,87	1,48
Si	1,66	0,639	0,796
Алмаз	10,76	1,25	5,76

Из анализа табл. 6.2 следует, что соотношение Коши хорошо выполняется для ряда щелочно-галогидных кристаллов, следовательно, в этих кристаллах предположение о центральности сил справедливо. Хуже обстоит дело с щелочными металлами, но и в этом случае такое предположение приближенно верно. Однако для ковалентных кристаллов и металлов переходных групп соотношение Коши не выполняется, что говорит о нецентральности упругих сил. Следует отметить также, что значения модулей упругости коррелируют с твердостью кристаллов и достигают рекордных величин для алмаза.



### 6.6. Упругие волны в кубических кристаллах

Пусть на элементарный объем кубической формы внутри кристалла действуют напряжения (рис. 6.9). Пусть напряжение, дей-

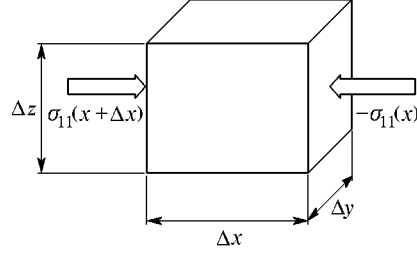


Рис. 6.9. Напряжения и силы в элементарном объеме

ствующее на грань  $x$ , равно  $\leftrightarrow\sigma_{11}(x)$ . Тогда на параллельную грань  $x + \Delta x$  действует напряжение

$$\sigma_{11}(x + \Delta x) \approx \sigma_{11}(x) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \Delta x. \quad (6.51)$$

Результирующая сила, действующая вдоль оси  $x$  на элементарный объем, будет равна

$$F_1 = F_1(x + \Delta x) \leftrightarrow F_1(x) = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta S = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z. \quad (6.52)$$

Необходимо, однако, учесть вклады в силу  $F_1$  от напряжений, действующих вдоль оси  $y$  и  $z$ . В результате (6.52) примет вид

$$F_1 = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} \Delta V. \quad (6.53)$$

Подобно (6.53) могут быть записаны компоненты силы  $F_2$  и  $F_3$ . С другой стороны, для элементарного объема сумма сил равна произведению массы на ускорение этого объема:

$$m \mathbf{a} = \rho \Delta V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (6.54)$$

где  $\rho$  — плотность кристалла. Сопоставляя (6.54) и (6.53), с учетом компонент  $F_2$  и  $F_3$ , мы можем записать уравнения движения частиц в твердом теле, которые в общем виде имеют форму

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.55)$$

Используя закон Гука (6.20) и определение тензора деформаций (6.14), с учетом суммирования можем представить уравнения (6.55) в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= C_{iklm} \frac{\partial \epsilon_{lm}}{\partial x_k} = \\ &= \frac{1}{2} C_{iklm} \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \right) = C_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Соотношения (6.56) представляют собой систему трех дифференциальных волновых уравнений, решения которых будем искать, выбрав динамически меняющиеся во времени и пространстве смещения в виде плоских волн:

$$u_i = u_i^0 \exp(i(\omega t \leftrightarrow \mathbf{K}_p x_p)), \quad (6.57)$$

где  $\omega$  — частота,  $\mathbf{K}$  — волновой вектор, нормальный к фронту упругой волны. Для случая длинных волн вид закона дисперсии  $\omega(\mathbf{K})$  для акустических фононов особенно прост:

$$\omega^{(s)} = v_{\text{зв}}^{(s)} K^{(s)}, \quad (6.58)$$

где индекс  $s = 1, 2, 3$  соответствует продольной и двум сдвиговым фоновым акустическим ветвям,  $v_{\text{зв}}$  — скорость звука, различная для всех трех мод. С учетом (6.58) смещения можно представить так:

$$u_i = u_i^0 \exp\left(i\omega \left(t \leftrightarrow \frac{x_p n_p}{v_{\text{зв}}}\right)\right), \quad (6.59)$$

где  $n_p$  — единичный вектор волновой нормали, совпадающий по направлению с волновым вектором. Подстановка решений (6.59) в уравнения (6.56) приводит к выражению

$$\Leftrightarrow \rho \omega^2 u_i = \Leftrightarrow C_{iklm} \frac{\omega^2}{v^2} n_m n_k u_l, \quad (6.60)$$

либо

$$\sum_{k,l,m} (C_{iklm} n_m n_k \Leftrightarrow \rho v_{\text{зв}}^2 \delta_{il}) u_l = 0.$$

Соотношения (6.60) — это *уравнения Кристоффеля*, которые представляют собой систему из трех однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $u_i$  и являются задачей на собственные значения и собственные векторы. Уравнения Кристоффеля являются основными для изучения распространения упругих волн в кристаллах произвольной симметрии. Возможный вклад в

величины скоростей упругих волн, связанных с другими эффектами, например, пьезоэлектрическим (описан в гл. 7), учитывают в (6.60) дополнительно.

Система (6.60) будет совместной и иметь нетривиальное решение, если равен нулю ее детерминант:

$$\det|C_{iklm}n_m n_k \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 \delta_{il}| = 0. \quad (6.61)$$

Это соотношение представляет собой характеристическое кубическое уравнение, корни которого — 3 собственных значения, определяющие взаимосвязь упругих констант и скоростей упругих волн. Рассмотрим, например, распространение упругих волн в направлении [110] кубического кристалла. Поскольку вектор направления распространения — единичный:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (6.62)$$

в этом случае выполняется

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0. \quad (6.63)$$

С учетом (6.63) и значений тензора упругих постоянных (6.31) уравнение (6.61) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 & \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44}) & 0 \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44}) & \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})\rho v_{3B}^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.64)$$

Это уравнение распадается на два — линейное и квадратное относительно  $\rho v_{3B}^2$ :

$$\begin{aligned} C_{44} \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 = 0, \quad & \left(\frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})\right)^2 = \\ & = \left(\frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})\right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow \rho v_{3B}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})\right) = 0 \quad (6.65) \end{aligned}$$

с корнями:

$$\begin{aligned}
 \rho v_1^2 &= C_{44} \left( v_1 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \right), \\
 \rho v_2^2 &= \frac{1}{2}(C_{11} \Leftrightarrow C_{12}) \left( v_2 = \sqrt{\frac{C_{11} \Leftrightarrow C_{12}}{2\rho}} \right), \\
 \rho v_3^2 &= \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44}) \left( v_3 = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \right).
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Решения (6.66) показывают связь фазовых скоростей упругих волн и определенных комбинаций упругих модулей. Кроме того, необходимо определить направления смещений, создаваемых этими волнами и, тем самым, выяснить типы волн. Для этого будем последовательно подставлять каждое из решений (6.66) в уравнения Кристоффеля (6.60). Начнем с первого из решений (6.66):

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow C_{44} \right) u_1^{(1)} + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44}) u_2^{(1)} + 0 \cdot u_3^{(1)} &= 0, \\
 \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44}) u_1^{(1)} + \left( \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44}) \Leftrightarrow C_{44} \right) u_2^{(1)} + 0 \cdot u_3^{(1)} &= 0, \\
 0 \cdot u_1^{(1)} + 0 \cdot u_2^{(1)} + (C_{44} \Leftrightarrow C_{44}) u_3^{(1)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

Уравнения (6.67) можно преобразовать так:

$$a u_1^{(1)} + b u_2^{(1)} = 0, \quad b u_1^{(1)} + a u_2^{(1)} = 0, \tag{6.68}$$

где  $a$  и  $b$  — определяются комбинацией модулей  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  и  $C_{44}$ . Система (6.68) совместна, если  $u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0$ . Полагая, что вектор смещения также имеет единичную длину:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, \tag{6.69}$$

для компонент вектора смещения, соответствующего первому из собственных значений (6.66), окончательно получим:

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0, \quad u_3^{(1)} = 1. \tag{6.70}$$

Поскольку поляризация данной волны направлена вдоль направления  $[001]$ , перпендикулярного направлению распространения  $[110]$ , в данном случае распространяется упругая *сдвиговая* (*поперечная*) волна, ее тип обычно обозначают буквой  $S$  (*shear*). Подставляя оставшиеся собственные значения, можем получить аналогичным путем направления двух других собственных векторов.

Общий результат для направления распространения  $[110]$  состоит в том, что распространяются три независимых упругих волны, из которых одна — *продольная*  $L$  (*longitudinal*) и две — *сдвиговые*  $S_1$  и  $S_2$ , скорости всех трех волн различны и заданы определенными комбинациями упругих постоянных (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Упругие волны в направлении  $[110]$  кубических кристаллов

Направление смещения (поляризация)	Тип волны	Скорость
$[001]$	$S_1$	$v_1 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$[1\bar{1}0]$	$S_2$	$v_2 = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}}$
$[110]$	$L$	$v_3 = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}}$

Из анализа табл. 6.3 следует, что, измерив скорости упругих волн в данном направлении, можно получить 3 независимых уравнения для определения всех трех упругих констант кубического кристалла. Ясно также, что смещения всех трех волн составляют тройку ортогональных векторов. Однако в направлении  $[100]$  можно получить еще более простые соотношения (табл. 6.4).

Таблица 6.4. Упругие волны в направлении  $[100]$  в кубических кристаллах

Направление смещения (поляризация)	Тип волны	Скорость
Лежит в плоскости $(100)$	$S$	$v_1 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$[100]$	$L$	$v_2 = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$

Из табл. 6.4 ясно, что скорость продольной волны определяется только константой  $C_{11}$ , а скорость сдвиговой — только константой  $C_{44}$ . Сдвиговые волны в данном направлении неразличимы по скоростям, их поляризация лежит в плоскости  $(100)$ , перпендикулярной направлению распространения. Направления, в которых скорости сдвиговых волн одинаковы, называются *акустическими осями*.

Качественно аналогичные результаты могут быть получены и для других направлений в кристалле:

1) распространяются три независимых упругих волны, каждая со своей скоростью. В частных случаях акустических осей скорости сдвиговых волн совпадают;

2) упругие смещения, соответствующие этим волнам, образуют ортогональную тройку векторов.

Распространение волн в направлениях акустических осей подобно случаю изотропной упругой среды, для которой существуют только две не равных нулю константы:

$$C_{11} \text{ и } C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} \Leftrightarrow C_{12}). \quad (6.71)$$

Из (6.71) следует, что при  $C_{11} \approx C_{12}$  выполняется  $C_{44} \rightarrow 0$ , т. е. такое твердое тело теряет способность противодействовать сдвиговым деформациям, и его кристаллическая решетка становится неустойчивой, например, в окрестности температуры плавления. Вообще, исследование поведения упругих постоянных при действии на твердое тело давлений, температуры и других внешних воздействий позволяет получить важную информацию о происходящих процессах, в особенности, в окрестности фазовых переходов различной природы.

Уравнения, подобные приведенным в табл. 6.3 и 6.4, могут быть получены и для кристаллов произвольной симметрии, следовательно, измеряя скорости звуковых волн различных типов в определенных направлениях, можно вычислить, с учетом возможных других эффектов, все компоненты тензора упругих постоянных.

### 6.7. Экспериментальное определение скоростей упругих волн

Существует довольно большое количество динамических методов определения упругих констант, однако все они могут быть разделены на две большие группы: резонансные и импульсные. В первом случае образец определенной формы с известными размерами представляет собой резонатор, и в нем тем или иным способом возбуждаются упругие колебания, которые достигают максимальной амплитуды при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной резонансной частотой. Значение резонансной частоты используют для вычисления упругих постоянных. Однако значительно более удобны и получили широкое распространение импульсные методы измерения скоростей и затухания звуковых волн. Принцип таких методов основан на измерении времени распространения ультразвукового импульса в исследуемом образце

(рис. 6.10). Серия импульсов малой длительности с большой амплитудой подается с генератора 1 на пьезоэлектрический преобразователь 2. Короткие импульсы имеют сложный спектр, включа-

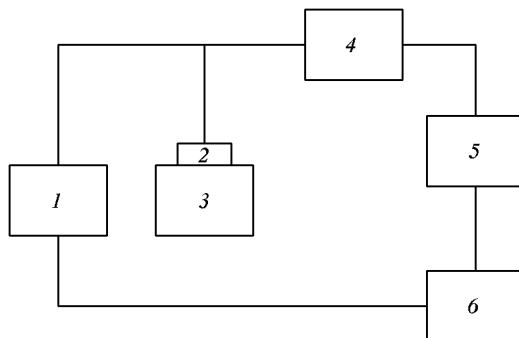


Рис. 6.10. Блок-схема ультразвукового импульсного метода: 1 — генератор мощных видеоимпульсов, 2 — пьезопреобразователь, 3 — образец, 4 — усилитель, 5 — осциллограф, 6 — синхронизирующий генератор

ющий в себя высокочастотные гармоники. Для генерации акустических волн используются определенным образом вырезанные пластинки из кристалла кварца, обладающего пьезоэлектрическим эффектом — пьезоэлектрические преобразователи. В таких кристаллах приложение в определенном направлении переменного электрического поля вызывает те или иные динамические деформации. Пьезопреобразователь, возбуждаясь импульсом на собственной резонансной частоте, близкой к какой-либо из гармоник импульса, генерирует продольные или сдвиговые упругие колебания, которые распространяются в образце 3, и отражаясь от полированного свободного торца образца, детектируются тем же преобразователем. Усилитель 4 усиливает серию слабых отраженных в образце импульсов для их визуального воспроизведения на экране осциллографа 5. Типичная серия импульсов показана на рис. 6.11. Син-

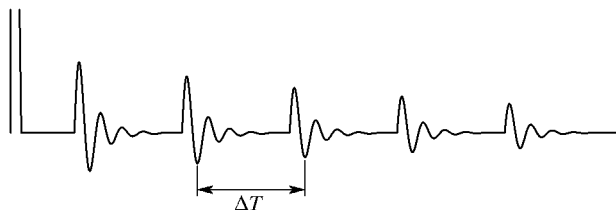


Рис. 6.11. Осциллограмма отраженных затухающих импульсов

хронизирующий генератор 6 необходим для измерения временных интервалов  $\Delta T$  между отраженными импульсами (рис. 6.11).

Упругие импульсы в образце будут перемещаться от торца к торцу до полного рассеяния энергии, поэтому их амплитуда будет уменьшаться. Вычисление скорости упругой волны, при известной длине образца  $L$ , производится по простой формуле:

$$v_{\text{зв}} = \frac{2L}{\Delta T}, \quad (6.72)$$

поскольку временной промежуток  $\Delta T$  соответствует двойному прохождению акустического импульса в образце.

### Задачи

6.1. Найти выражения модулей упругости через упругие податливости кубического кристалла.

6.2. Найти выражение для коэффициента Пуассона (отношение поперечной деформации образца к продольной в заданном направлении) кубического кристалла через упругие постоянные, если кристалл подвергнут растяжению в направлении  $[010]$ .

6.3. Показать, что в случае гидростатического сжатия объемный модуль упругости  $B = (C_{11} + 2C_{12})/3$ .

6.4. Получить зависимости модуля Юнга (отношение продольных напряжений и деформаций) и модуля сдвига (отношение касательного напряжения к деформации сдвига) кубического кристалла от упругих податливостей в направлении  $[310]$ .

6.5. Модули упругой податливости кубического монокристалла  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$   $S_{11} = 8,5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ ,  $S_{12} = -0,91 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$  и  $S_{44} = 38 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ , плотность  $9200 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Найти значения скоростей звука в направлениях  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ ,  $[110]$ ,  $[1\bar{1}0]$ ,  $[111]$ . Объяснить полученное различие в скорости продольной волны в направлении  $[111]$  с табличным, которое равно  $3600 \text{ м}/\text{с}$ .