

Лекция 15

СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА: РЕНОРМГРУППА, УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ, СКЕЙЛИНГ

Обратимся к модели, уже обсуждавшейся в нашем курсе, — логистическому отображению

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \quad (15.1)$$

Динамика зависит от единственного параметра λ . При $\lambda = 0$ после первой же итерации получаем $x = 1$, и далее величина x не меняется, т. е. это простой регулярный режим — устойчивая неподвижная точка. С другой стороны, как мы знаем из предыдущих лекций, при $\lambda = 2$ реализуется хаос. Естественно спросить, как он возникает при плавном увеличении λ от 0 до 2?

15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении

Рис. 15.1 показывает, как устроено одномерное пространство параметров модели и как выглядят итерационные диаграммы в различных областях.

При $\lambda < 0,75$ аттрактором служит неподвижная точка, которую можно также назвать циклом периода 1. Ее можно найти явно, решив квадратное уравнение $x = 1 - \lambda x^2$, откуда $x_0 = (1 - \sqrt{1 + 4\lambda}) / 2\lambda$. (Второй корень квадратного уравнения отвечает неустойчивой неподвижной точке, репеллеру.) Чтобы исследовать неподвижную точку на устойчивость, следует вычислить мультипликатор, показывающий как изменяется малое возмущение за период цикла. Это производная функции $f(x) = 1 - \lambda x^2$ в точке $x = x_0$: $\mu = f'(x_0) = -2\lambda x_0 = -1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}$. Отсюда видим, что при $\lambda = 0,75$ мультипликатор переходит через (-1) , и неподвижная точка теряет устойчивость. При этом от нее отделяется цикл периода 2: установившийся режим представляет собой чередующуюся последовательность двух чисел: $x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$x_2 = 1 - \lambda x_1^2, \quad x_1 = 1 - \lambda x_2^2. \quad (15.2)$$

Вычитая одно уравнение из другого и предполагая, что $x_1 \neq x_2$, получаем $x_1 + x_2 = 1/\lambda$. Исключая с помощью этого вы-

ражения одно из неизвестных, приходим к квадратному уравнению $1/\lambda - x = 1 - \lambda x^2$, откуда $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{4\lambda - 3})/2\lambda$. Мультипликатор цикла периода 2 вычисляется с использованием цепного правила дифференцирования сложной функции и равен $\mu = f'(x_1)f'(x_2) = 4 - 4\lambda$. При $\lambda = 1,25$ мультипликатор цикла проходит через (-1) , и он, в свою очередь, теряет устойчивость. Рождается устойчивый цикл периода 4. Далее таким же образом

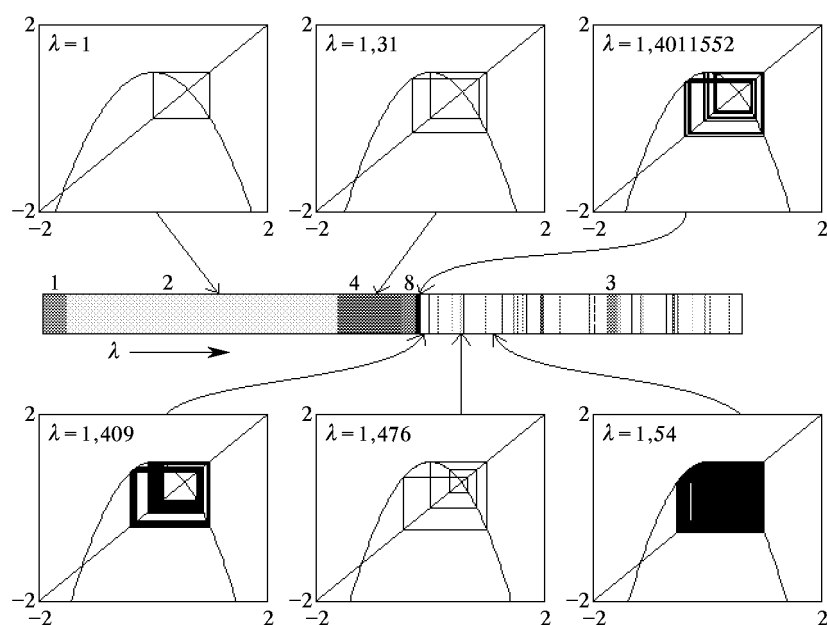


Рис. 15.1. Области различных режимов на оси параметра λ для логистического отображения (15.1) — «карта динамических режимов» в одномерном пространстве и итерационные диаграммы, иллюстрирующие динамику в некоторых точках. Области хаоса показаны белым цветом

происходит потеря устойчивости цикла периода 4 и рождение цикла периода 8 и т. д. до бесконечности. Соответствующие бифуркационные значения параметра λ приведены в таблице.

Реализующийся каскад бифуркаций удвоения периода наглядно представлен на рис. 15.2, где показана так называемая бифуркационная диаграмма или бифуркационное дерево. Для его построения на компьютере последовательно задаются значения параметра с некоторым малым шагом; для каждого производится некоторое число итераций отображения до выхода на аттрактор, а затем получаемые при итерациях величины x откладываются на графике. На рисунке хорошо видны точки бифуркаций удвоений периода,

Т а б л и ц а. Значения параметра в логистическом отображении $x' = 1 - \lambda x^2$, отвечающие бифуркациям удвоения периода, сверхустойчивым циклам и точкам Мизюревича («развитый хаос»)

Номер k	Бифуркация удвоения периода, λ_k	Сверхустойчивые циклы, λ_k^0	Точки Мизюревича, λ_k^M
1	0,75	0	2
2	1,25	1	1,54368901269
3	1,36809893939	1,31070264134	1,43035763245
4	1,39404615660	1,38154748443	1,40740511816
5	1,39963123887	1,39694535970	1,40249217636
6	1,40082874237	1,40025308121	1,40144149425
7	1,40108527126	1,40096196294	1,40121650431
8	1,40114021470	1,40111380494	1,40116832084
9	1,40115198203	1,40114632583	1,40115800151
10	1,40115450224	1,40115329085	1,40115579142
Предел	1,40115518909	1,40115518909	1,40115518909

где каждая ветвь дерева расщепляется на две. При достаточно больших λ наблюдается хаос, соответствующие области выглядят как более или менее равномерно заполненные точками участки «кроны». Области хаоса чередуются с «окнами устойчивости» — узкими зонами по параметру, в которых динамика становится периодической.

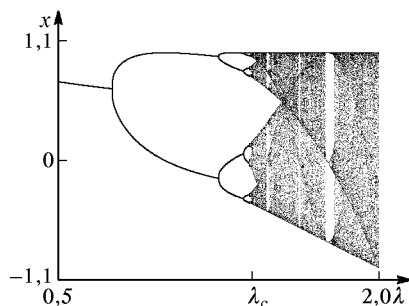


Рис. 15.2. Бифуркационная диаграмма («бифуркационное дерево») для логистического отображения

Определенные заключения о порядке появления циклов различного периода и, в том числе, окон устойчивости в закрытической области, можно сделать на основании теоремы Шарковского (лекция 2). Справедливо следующее утверждение (книга Шарковский и др., 1986). Пусть $\lambda[m]$ — наименьшее значение параметра, при котором у отображения

имеется цикл периода m . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda[1] &\leq \lambda[2] \leq \lambda[2^2] \leq \lambda[2^3] \leq \dots \leq \\ &\leq \lambda[2^3 \cdot 9] \leq \lambda[2^3 \cdot 7] \leq \lambda[2^3 \cdot 5] \leq \lambda[2^3 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[2^2 \cdot 9] \leq \\ &\leq \lambda[2^2 \cdot 7] \leq \lambda[2^2 \cdot 5] \leq \lambda[2^2 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[2 \cdot 9] \leq \\ &\leq \lambda[2 \cdot 7] \leq \lambda[2 \cdot 5] \leq \lambda[2 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[9] \leq \lambda[7] \leq \lambda[5] \leq \lambda[3]. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что теорема говорит только о наличии циклов и ничего не утверждает относительно их устойчивости или неустойчивости.

Как можно видеть из таблицы, последовательность точек бифуркаций удвоения периода сходится к определенному пределу, который по аналогии с теорией фазовых переходов называют *критической точкой*. Другой, более простой способ найти критическую точку состоит в том, чтобы проследить за последовательностью так называемых сверхустойчивых циклов. Эти циклы, содержащие в своей орбите точку экстремума, реализуются при некоторых определенных значениях параметра λ_k^0 . Последовательность λ_k^0 сходится по такому же закону и к тому же пределу, как и последовательность λ_k :

$$\lambda_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^0 = 1,40115518909205060052382 \dots \quad (15.3)$$

В определенном смысле эта точка является границей хаоса: при $\lambda < \lambda_c$ реализуется только регулярное, периодическое поведение, а для $\lambda > \lambda_c$ в сколь угодно малой окрестности критической точки существуют значения параметра, отвечающие хаосу. О наличии хаоса можно судить по графику ляпуновского показателя, обсуждавшемуся в одной из предыдущих лекций (см. рис. 10.5). В области устойчивых периодических движений ляпуновский показатель отрицателен. В точках бифуркаций удвоения периода он подходит к нулю. За точкой накопления каскада удвоений периода зависимость ляпуновского показателя от параметра имеет сложный характер, причем чередуются области хаоса с положительными его значениями и периодическими режимов, для которых он отрицателен.

Фейгенбаум заметил, что интервал по параметру между последовательными бифуркациями удвоения периода уменьшается с ростом их номера так, что отношение $(\lambda_k - \lambda_{k-1})/(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ стремится к константе $\delta = 4,669\dots$, которую принято называть *константой Фейгенбаума*. Иными словами, последовательность значений λ_k сходится по закону геометрической прогрессии. Таким же свойством обладает и последовательность λ_k^0 . Эти наблюдения были бы интересными и сами по себе, но оказалось, что такой же закон сходимости, с той же самой константой, имеет место

для многих других одномерных отображений (например, $x_{n+1} = \lambda \sin x_n$), а также для многих нелинейных диссипативных систем, описываемых дифференциальными уравнениями (см. лекцию 5). Это замечательное обстоятельство нуждается, очевидно, в серьезном теоретическом обосновании. Оно достигается привлечением метода ренормгруппы (РГ), к изложению которого мы теперь переходим.

15.2. Уравнение РГ

Для нашей исходной модели уравнение $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x) = 1 - \lambda x^2$ определяет оператор эволюции за один временной шаг. Если рассмотреть два шага, то имеем, очевидно, $x_{n+2} = f(f(x_n)) = 1 - \lambda(1 - \lambda x_n^2)^2$. Введем вместо x новую переменную, отличающуюся от старой только постоянным множителем α_0 . Этот множитель подберем так, чтобы функция, задающая оператор эволюции за два шага, была нормирована в начале координат на единицу. Заменяя в левой и правой частях уравнения x на x/α_0 , запишем результат в виде $x_{n+2} = f_1(x_n)$, где $f_1(x) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0))$, $\alpha_0 = 1/f(f(0)) = 1 - \lambda$. Теперь примем за исходную функцию $f_1(x)$ и произведем над ней те же действия. Получится перенормированный оператор эволюции за четыре шага: $x_{n+4} = f_2(x_n)$, где $f_2(x) = \alpha_1 f_1(f_1(x/\alpha_1))$, $\alpha_1 = 1/f_1(f_1(0))$. Далее эту процедуру можно повторять снова и снова, что приводит к рекуррентному уравнению

$$f_{k+1}(x) = \alpha_k f_k \left(f_k \left(\frac{x}{\alpha_k} \right) \right), \quad \alpha_k = \frac{1}{f_k(f_k(0))}. \quad (15.4)$$

Это и есть *уравнение РГ*. Смысл его в том, что оно выражает оператор эволюции за 2^{k+1} шагов через оператор за 2^k шагов, причем для каждого оператора динамическая переменная нормирована на свой масштабный множитель.

Задавая в качестве начальной функцию $f(x) = 1 - \lambda x^2$, рассмотрим значения параметра λ немного меньшее, равное и немного большее критического λ_c . Как будет вести себя в каждом из этих случаев порождаемая уравнением (15.4) последовательность функций? Можно написать программу для компьютера, которая строила бы графики функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... На рис. 15.3 показано, как они выглядят. При $\lambda < \lambda_c$ график становится от шага к шагу все более пологим, а при $\lambda > \lambda_c$ — все более крутым. Если же $\lambda = \lambda_c$, то форма кривой на графике стабилизируется после первых шагов РГ преобразования и более не меняется. Иными словами, при больших значениях индекса k функции $f_k(x)$ перестают от него зависеть, и существует определенный предел: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = g(x)$. Тогда из формулы (15.4) следует, что для

функции $g(x)$ должно быть справедливо соотношение

$$g(x) = \alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (15.5)$$

которое называется *уравнением Фейгенбаума–Цвигановича*. При этом

$$g(0) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{g(g(0))}. \quad (15.6)$$

Заметим, что функция $g(x)$ должна иметь при $x = 0$ квадратичный экстремум, ибо он присутствует у всех функций $f_k(x)$. С учетом этого условия, решение уравнения (15.5) оказывается

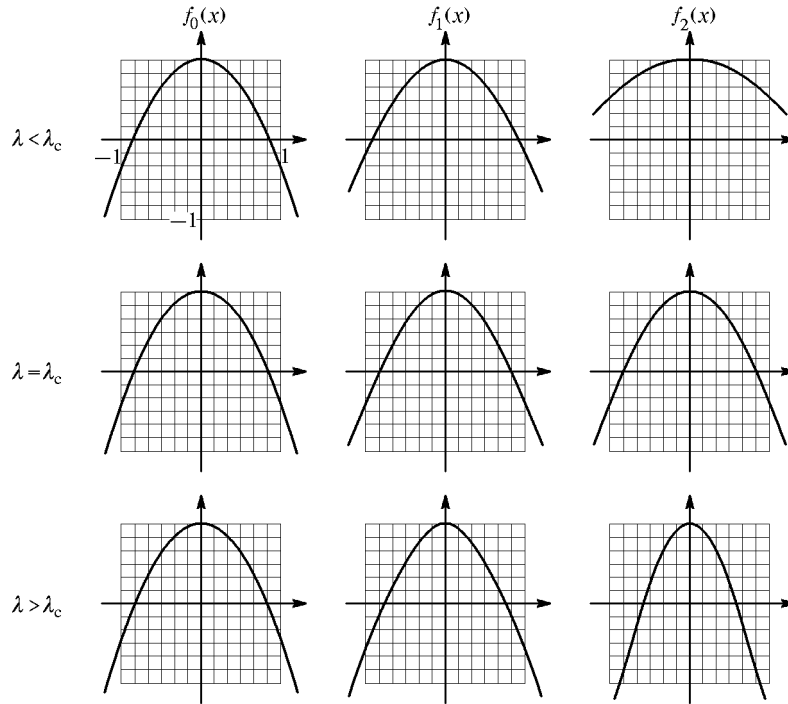


Рис. 15.3. Действие РГ преобразования на функцию $f(x)$ при значениях параметра λ меньшем, равном и большем критического λ_c

единственным, и его можно найти следующим методом. Представим функцию $g(x)$ конечным отрезком ряда Тейлора, содержащим четные степени x ,

$$g(x) = 1 + \sum_{r=1}^m g_r x^{2r} \quad (15.7)$$

преобразования) оператор эволюции исходной системы в критической точке за число шагов 2^k . Более конкретно, в асимптотике по k справедливо следующее соотношение:

$$f^{2^k}(x) = f(f(f(\dots(x)\dots))) \cong \frac{g(A_k x)}{A_k}, \quad A_k = \frac{1}{f^{2^k}(0)} \cong \text{const} \cdot \alpha^k. \quad (15.11)$$

Подчеркнем, что в формулах (15.5) и (15.6) присутствует только функция g и не содержится никакого воспоминания о конкретной форме исходного отображения. Это значит, что функция $g(x)$ *универсальна* — ее вид обусловлен лишь структурой операции РГ, привязанной именно к изучению перехода к хаосу через удвоения периода (напомним, что мы следили за изменением вида перенормированного оператора эволюции при последовательных удвоениях длительности рассматриваемых временных интервалов). Если в отображении, имеющем квадратичный экстремум, реализуется каскад бифуркаций удвоений периода и существует критическая точка, то независимо от конкретного вида отображения перенормированный оператор эволюции на больших временах в критической точке будет описываться той же самой функцией g . (Существенная деталь: за начало отсчета, относительно которого пересчитывается масштаб при перенормировке, должна быть принята точка экстремума исходного отображения.)

Заметим, что отображение $x' = g(x)$ имеет неподвижную точку $x^* = 0,5493\dots$. Отсюда следует, что точка x^*/α принадлежит циклу периода 2 того же отображения. Действительно, из функционального уравнения, которому удовлетворяет функция $g(x)$, можно видеть, что $g(g(x^*/\alpha)) = x^*/\alpha$. Аналогичным образом можно показать, что x^*/α^2 принадлежит циклу периода 4, x^*/α^3 — циклу периода 8 и т. д. Таким образом, отображение $x' = g(x)$ имеет циклы со всевозможными периодами 2^k . Все эти циклы неустойчивы и характеризуются такими же по величине мультипликаторами, как и неподвижная точка: $\mu_c = g'(x^*) = -1,6011913\dots$. Для логистического отображения (и любой другой конкретной системы, относящейся к данному классу универсальности) мультипликаторы циклов периода 2^k в критической точке быстро сходятся при увеличении k к универсальной константе μ_c .

15.3. Линеаризованное уравнение РГ

Предположим, что мы немного изменили параметр в исходном отображении и вышли тем самым из критической точки. Это соответствует некоторому возмущению начального условия в уравнении РГ (15.4), так что теперь будем иметь дело не с неподвижной

точкой $g(x)$, а с решениями вблизи нее. Формально, нам следовало бы просто искать решение уравнения (15.4) в виде

$$f_k(x) = g(x) + \varepsilon h_k(x) \quad (15.12)$$

и исследовать поведение малого возмущения h . Однако для упрощения анализа полезен небольшой трюк. Давайте слегка модифицируем уравнение (15.4) и подставим вместо переменного масштабного фактора найденную выше константу $\alpha = -2,5029\dots$. Переформулированное таким образом РГ преобразование столь же правомерно, как исходное, и имеет в качестве неподвижной точки ту же самую функцию $g(x)$. Отметим только, что нормировка в начале координат на единицу теперь не заложена в самой постановке задачи, а представляет собой дополнительное условие.

Итак, сделаем подстановку (15.12) в уравнение

$$f_{k+1}(x) = \alpha f_k\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (15.13)$$

тогда в линейном приближении получаем

$$h_{k+1}(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h_k\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h_k\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right]. \quad (15.14)$$

Уравнение (15.14) имеет структуру $h_{k+1} = \hat{\mathbf{m}}h_k$, где $\hat{\mathbf{m}}$ — линейный оператор, действующий в пространстве функций. Вопрос о том, как ведет себя при итерациях решение линеаризованного уравнения РГ (15.14), тесно связан с вопросом о спектре собственных чисел линейного оператора $\hat{\mathbf{m}}$. Действительно, если мы имеем какую-либо собственную функцию $h(x)$ и собственное значение ν , удовлетворяющие уравнению $\nu h = \hat{\mathbf{m}}h$, то решение может содержать компоненту, которая при итерациях ведет себя как $\nu^k h(x)$. Существенную роль будут играть собственные числа, превышающие по абсолютной величине 1, поскольку соответствующие им компоненты возмущения нарастают при последовательных итерациях РГ преобразования.

Итак, нам необходимо рассмотреть следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\nu h(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right]. \quad (15.15)$$

Оказывается, что она имеет дискретный спектр. Для численного решения уравнения (15.15) используется уже известное полиномиальное разложение функции $g(x)$ и аналогичное представление для функции $h(x)$. Уравнение (15.15) соответствует тогда задаче на собственные векторы и собственные значения для конечномерной матрицы, к которой применимы стандартные методы линейной алгебры. Расчеты показывают, что наибольшие по абсолютной

величине собственные числа таковы:

$$\nu_0 = \delta = 4,669201609102990672 \dots, \quad \nu_1 = \alpha, \quad \nu_2 = 1, \quad (15.16)$$

а остальные собственные числа по модулю меньше единицы.

Собственное число δ играет основную роль: как можно заметить, оно определяет константу сходимости, обнаружение которой послужило толчком к разработке всей теории. Соответствующая ему собственная функция аппроксимируется полиномом

$$h_0(x) = 1 - 0,325651x^2 - 0,050554x^4 + 0,014560x^6 - \\ - 0,000881x^8 - 0,000106x^{10} + 0,000020x^{12}. \quad (15.17)$$

Что касается собственных чисел α и 1, то они оказываются связанными с инфинитезимальными заменами переменной и являются несущественными, т. е. их можно игнорировать.

Остановимся подробнее на этом моменте. Пусть мы выполнили в исходном отображении замену переменной $x \rightarrow x + \varepsilon\varphi(x)$, $\varepsilon \ll 1$. Хотя это приведет к возмущению порождаемой итерациями уравнения РГ последовательности функций $f_k(x)$, но такие возмущения всегда могут быть устранены обратной заменой.

Часть спектра уравнения (15.15), ассоциирующаяся с заменами переменной, может быть найдена явно. Рассмотрим отображение $x' = g(x)$. Если в обеих частях положить $x \rightarrow x + \varepsilon x^m$, $\varepsilon \ll 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то получим $x' = g(x) + \varepsilon[g'(x)x^m - (g(x))^m]$. Появившееся в квадратных скобках выражение $g'(x)x^m - (g(x))^m$ представляет собой собственную функцию уравнения (15.15) с собственным значением $\nu = \alpha^{1-m}$, в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой.

Полагая $m = 0$, получаем собственное значение $\nu_1 = \alpha$, связанное с заменой переменной типа сдвига, $x \rightarrow x + \varepsilon$. Ему отвечает собственная функция $h_1(x) = g'(x) - 1$. Собственное значение $\nu_2 = 1$ ассоциируется с инфинитезимальной масштабной заменой $x \rightarrow x + \varepsilon x$, этому соответствует $m = 1$ и собственная функция $h_2(x) = g'(x)x - g(x)$.

С точки зрения классификации неподвижных точек, неподвижная точка уравнения РГ $g(x)$ является *седлом*. У этого седла имеется единственное существенное неустойчивое направление (собственное число δ) и бесконечное множество устойчивых направлений, связанных с собственными числами, которые по модулю меньше 1.

Попытаемся представить себе действие РГ преобразования (15.4) геометрически, вообразив бесконечномерное пространство, где каждой точке отвечает некоторая функция $f(x)$. Преобразование (15.4) переводит каждую точку этого пространства в другую, но при этом точка, соответствующая $g(x)$, остается неподвижной. Вблизи этой седловой точки имеется единственное (существенное) неустойчивое направление, вдоль которого возмущение нарастает при применении РГ преобразования, и гиперповерхность

коразмерности один, на которой имеет место приближение к неподвижной точке и которая является устойчивым многообразием. (рис. 15.5).

Наша исходная модель — логистическое отображение при различных значениях параметра λ представляется некоторой кривой, причем точка ее пересечения с устойчивым многообразием отве-

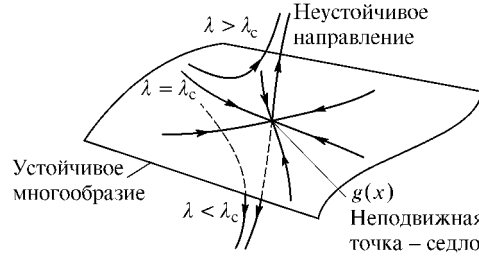


Рис. 15.5. Схематическое представление динамики, порождаемой РГ преобразованием в пространстве функций вблизи неподвижной точки

чает критической точке: стартуя из нее, мы приходим при итерациях РГ преобразования в неподвижную точку $g(x)$.

Если значение параметра очень мало отличается от критического, то при итерациях РГ преобразования сначала происходит приближение к неподвижной точке вдоль устойчивого многообразия, а потом уход от нее вдоль неустойчивого направления, связанного с собственным числом δ . Итак, если мы сдвигаемся по параметру из критической точки, то решение уравнения РГ в линейном приближении по возмущению будет иметь вид

$$f_k(x) = g(x) + C\delta^k h_0(x). \quad (15.18)$$

В более общем случае, когда добавка мала только в исходном отображении, а при итерациях РГ преобразования становится значительной, решение можно представить в виде

$$f_k(x) = G(x, C\delta^k), \quad (15.19)$$

где функция двух аргументов $G(x, C)$ отвечает неустойчивому многообразию неподвижной точки $g(x)$, причем $G(x, 0) = g(x)$.

Из уравнения (15.18) или (15.19) следуют важные выводы:

1. *Универсальность.* Вид оператора эволюции на больших временах 2^k определяется единственным параметром, в качестве которого выступает коэффициент C . Этот коэффициент можно считать пропорциональным отклонению управляющего параметра от критической точки: $C = \text{const} \cdot \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_c$.

2. *Скейлинг.* Вид оператора эволюции (в терминах перенормированной переменной x) не меняется при замене $C \rightarrow C/\delta$, $k \rightarrow k + 1$.

15.4. Скейлинг

Обнаруженный Фейгенбаумом закон сходимости есть не что иное, как частное проявление свойства скейлинга: если при некотором значении $\Delta\lambda$ наблюдается бифуркация удвоения периода, то при отклонении от критической точки $\Delta\lambda/\delta$ оператор эволюции за удвоенный период времени должен быть подобен, т. е. тоже отвечать моменту бифуркации.

Более общая формулировка состоит в том, что структура разбиения оси параметра λ на области различного типа динамики воспроизводит себя при уменьшении масштаба относительно критической точки в δ раз (рис. 15.6). Иными словами, в сходственных точках λ и $\lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta$ реализуются подобные режимы динамики. Это означает, во-первых, совпадение характера режимов

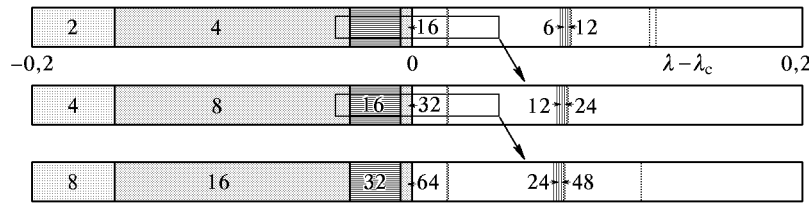


Рис. 15.6. Скейлинг пространства параметров вблизи критической точки. Цифрами обозначены периоды циклов. Пересчет масштаба по оси параметра λ производится в $\delta = 4,669 \dots$ раза

(периодический, хаотический), а во-вторых, возможность определения характеристик одного режима по характеристикам другого с помощью надлежащего пересчета. Этот пересчет сопровождается изменением масштаба времени, так что характерный период движений возрастает при приближении к критической точке, а в ней самой обращается в бесконечность.

Скейлинг работает и в докритической, и в закритической области. Мы видели, что при $\lambda = 2$ логистическое отображение демонстрирует развитый хаос. Можно указать такую сходящуюся к критической точке сверху по закону Фейгенбаума последовательность значений λ_k^M , для которых режим развитого хаоса, допускающий кодирование траекторий произвольными последовательностями двух символов, имеет место у отображения, определенного за 2^k временных шагов, это так называемые точки Мизюревича (см. таблицу на с. 220). Поэтому, взяв сколь угодно малый интервал параметра $(\lambda_c, \lambda_c + \varepsilon)$, мы непременно найдем в нем точки, где реализуется хаос. В этом смысле критическая точка служит границей хаоса. Полная же картина динамических режимов в закритической области очень сложна, содержит как хаос, так и «окна» периодических режимов. К тому же она репродуцируется

бесконечно много раз в бесконечно малой окрестности критической точки, в силу свойства скейлинга!

Одним из проявлений скейлинга является характерная зависимость мультипликаторов от параметра для циклов периода 2^k вблизи критической точки (рис. 15.7).

В момент рождения каждого цикла его мультипликатор равен $+1$. При увеличении параметра λ мультипликатор уменьшается, проходит через 0 и затем через -1 . В этот момент цикл перестает

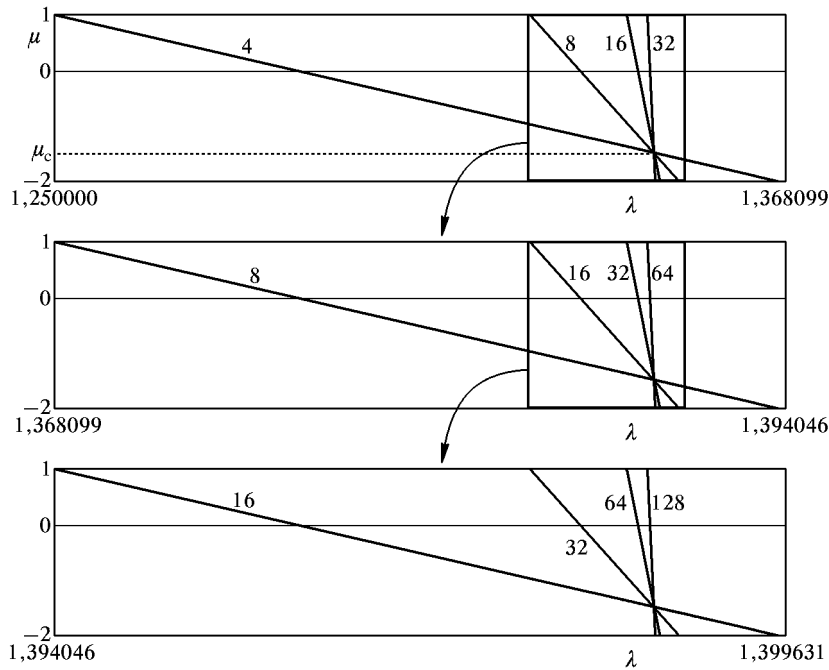


Рис. 15.7. Зависимость мультипликаторов циклов (период указан цифрами) от параметра λ вблизи критической точки и иллюстрация скейлинга — картинка воспроизводит себя при пересчете масштаба по горизонтальной оси в δ раз

быть устойчивым, и рождается цикл удвоенного периода также с мультипликатором $+1$. Графики, отвечающие циклам периода 2^k и 2^{k+1} , переходят друг в друга при пересчете масштаба по оси параметра λ на фактор δ . Точка пересечения кривых зависимости μ_k от λ для циклов разного периода (в асимптотике по k) есть критическая точка. Величина мультипликатора в точке пересечения стремится к универсальной константе $\mu_c = -1,60119\dots$

Тот факт, что мультипликаторы циклов в критической точке для циклов периода 2^k сходятся к универсальной константе, удобно использо-

вать для нахождения критической точки в конкретных нелинейных системах. Для этого нужно подобрать параметр так, чтобы мультипликатор какого-либо цикла периода 2^k обращался в μ_c . Точность оценки можно проконтролировать, увеличив k . Например, для логистического отображения мультипликатор цикла периода 2 выражается формулой $\mu = 4 - 4\lambda$. Потребовав $\mu = \mu_c$, получаем $\lambda = 1,4003$, что уже хорошо согласуется с точным значением $1,401155\dots$

Скейлинг проявляется также в структуре бифуркационного дерева, что иллюстрируется серией диаграмм на рис. 15.8. Каждый последующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной

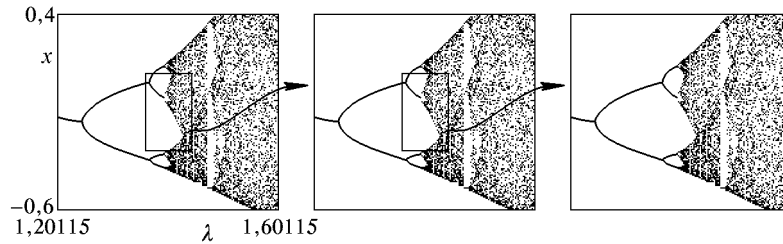


Рис. 15.8. Иллюстрация скейлинга в структуре бифуркационного дерева. Масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4,6692\dots$ раза относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$, а по вертикальной оси x — в $\alpha = -2,5029\dots$ раза относительно точки $x = 0$ (знак минус означает изменение ориентации — картинка переворачивается вверх ногами)

x пересчитывается в α раз относительно точки $x = 0$ (экстремума отображения), а по оси управляющего параметра — в δ раз относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$. Как можно видеть, картинки хорошо совпадают, причем степень соответствия тем лучше, чем на более глубокий уровень иерархии мы проникаем.

На рис. 15.9 демонстрируется свойство скейлинга на графике ляпуновского характеристического показателя вблизи критической точки. Как уже говорилось, при пересчете управляющего параметра

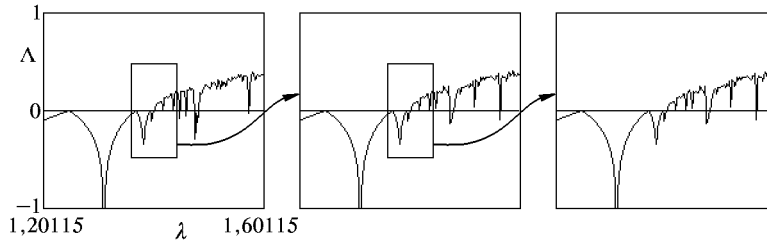


Рис. 15.9. Иллюстрация скейлинга на графике ляпуновского показателя. Масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4,6692\dots$ раза относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$, а по вертикальной — в 2 раза

тра по правилу $\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/\delta$ получается режим динамики подобный исходному, но с удвоенным временным масштабом. Поэтому ляпуновский показатель (который имеет размерность обратного времени) пересчитывается по правилу $\Lambda \rightarrow \Lambda/2$. Из рисунка видно, что ожидаемый скейлинг подтверждается с высокой точностью, растущей при переходе к более глубоким уровням. Огибающая на графике зависимости ляпуновского показателя от параметра подчиняется соотношению

$$\Lambda \propto (\lambda - \lambda_c)^\chi, \quad (15.20)$$

где критический индекс $\chi = \log_\delta 2 = 0,449806966466\dots$

Изложенные результаты ренормгруппового анализа дают обоснование обнаруженной Фейгенбаумом количественной универсальности для одномерных отображений. Они оказались применимыми, однако, к гораздо более широкому классу нелинейных диссипативных систем. На качественном уровне это можно объяснить тем, что при приближении к критической точке, когда характерный временной период становится очень большим, степень сжатия элемента фазового объема возрастает и, соответственно, многомерное отображение Пуанкаре все точнее аппроксимируется одномерным. Доказательство теоремы, обосновывающей этот факт, опубликовали Колле, Экмани и Кох в 1981 г. (Collet et al., 1981).